Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Vorlesung 30

Linear reduktive Gruppen

In den verbleibenden Vorlesungen möchten wir zeigen, dass die Invariantenringe zu algebraischen Operationen der allgemeinen linearen oder der speziellen linearen Gruppe über $\mathbb{C}$ endlich erzeugt sind. Der Schlüsselbegriff für diese Aussage ist die *lineare Reduktivität*, der eine Eigenschaft sämtlicher Darstellungen der Gruppe ist. Eine Darstellung einer Gruppe G ist einfach ein Gruppenhomomorphismus

$$G \longrightarrow \mathrm{GL}\,(V)$$

mit einem K-Vektorraum V. Wenn G eine affin-algebraische Gruppe über einem fixierten Körper K (der häufig als algebraisch abgeschlossen angenommen wird) ist, so interessiert man sich vor allem für Darstellungen in Vektorräume über diesem Körper. Ferner soll die Darstellung algebraisch sein. Diese Forderungen kommen in der folgenden Definition zum Ausdruck.

Definition 30.1. Es sei K ein Körper und sei G eine affin-algebraische Gruppe über K. Unter einer *K-rationalen Darstellung* von G versteht man einen Gruppenhomomorphismus

$$G \longrightarrow \mathrm{GL}\,(V)$$

mit einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V (also eine Darstellung von G), die durch einen K-Hopf-Algebrahomomorphismus der Hopfalgebren zu G bzw. $\mathrm{GL}\,(V)$ induziert wird.

Dies ist äquivalent dazu, dass die Operation von G auf V, also die Abbildung

$$G \times V \longrightarrow V,$$

algebraisch ist, also durch eine Kooperation der Hopfalgebra H (zu G) auf dem Polynomring $K[V]$ gegeben ist. Man sagt dann auch, dass G auf V K-rational operiert.

Für die multiplikative Gruppe $K^\times$ ist beispielsweise die Zuordnung

$$K^\times = \mathrm{GL}_1(K) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(K)\,,\; t \longmapsto \begin{pmatrix} t^{a_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^{a_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^{a_n} \end{pmatrix},$$

mit $a_j \in \mathbb{Z}$ eine K-rationale Darstellung, für die additive Gruppe K ist beispielsweise die Zuordnung

$$K \longrightarrow \mathrm{GL}_2(K)\,,\, t \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

eine solche.

Zur Formulierung der linearen Reduktivität brauchen wir noch einige weitere Begriffe aus der Darstellungstheorie.

Definition 30.2. Eine Darstellung

$$\rho \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}\,(V)$$

einer Gruppe G in einem K-Vektorraum V heißt *irreduzibel*, wenn $V \neq 0$ ist und wenn die einzigen G-invarianten Untervektorräume 0 und V sind.

Definition 30.3. Eine Darstellung

$$\rho \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}\,(V)$$

einer Gruppe G in einem K-Vektorraum V heißt *vollständig reduzibel*, wenn V die direkte Summe aus G-invarianten Untervektorräumen ist, die jeweils irreduzibel sind.

Zwei Darstellungen

$$\rho_1 \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}\,(V_1)$$

und

$$\rho_2 \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}\,(V_2)$$

heißen *äquivalent*, wenn es eine bijektive K-lineare Abbildung

$$\varphi \colon V_1 \longrightarrow V_2$$

mit $\rho_2 = \varphi \circ \rho_1$ gibt (wobei φ als Isomorphismus zwischen den allgemeinen linearen Gruppen aufgefasst wird).

Definition 30.4. Eine affin-algebraische Gruppe G über einem Körper K heißt *linear reduktiv*, wenn jede K-rationale Darstellung von G vollständig reduzibel ist.

Wir werden später sehen, dass die allgemeine lineare Gruppe über $\mathbb{C}$ linear reduktiv ist, was auf maßtheoretischen Methoden beruht. Zunächst wenden wir uns endlichen (nichtmodularen) Gruppen und kommutativen Gruppen zu, die ebenfalls linear reduktiv sind.

Lineare Reduktivität von endlichen Gruppen

Wir brauchen zunächst das folgende einfache Lemma.

Lemma 30.5. *Es sei K ein Körper und G eine Gruppe, die auf den beiden K-Vektorräumen V und W linear operiere. Es sei $\varphi \colon V \to W$ eine G-verträgliche lineare Abbildung. Dann ist sowohl* $\operatorname{kern} \varphi$ *als auch* $\operatorname{bild} \varphi$ *G-invariant.*

Beweis. Sei $v \in \operatorname{kern} \varphi$ und $g \in G$. Wegen der Verträglichkeit von φ mit den Gruppenoperationen ist

$$\varphi(gv) = g(\varphi(v)) = g(0) = 0,$$

also ist $gv \in \operatorname{kern} \varphi$ und der Kern ist invariant. Bei $w \in \operatorname{bild} \varphi$, sagen wir $w = \varphi(v)$, und $g \in G$ ist wiederum

$$\varphi(gv) = g(\varphi(v)) = g(w),$$

also $gv \in \operatorname{bild} \varphi$ und das Bild ist ebenfalls invariant. □

Heinrich Maschke (1853-1908)

Die folgenden Aussagen heißen *Lemma von Maschke* bzw. *Satz von Maschke.*

Lemma 30.6. *Es sei K ein Körper und G eine endliche Gruppe, deren Ordnung kein Vielfaches der Charakteristik von K sei. Es sei*

$$\rho \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

eine Darstellung in einen endlichdimensionalen K-Vektorraum V und $U \subseteq V$ ein G-invarianter Untervektorraum. Dann gibt es einen G-invarianten Untervektorraum $W \subseteq V$ mit $V = U \oplus W$.[1]

[1]Einen solchen Unterraum nennt man ein *G-invariantes Komplement* von U.

Beweis. Aufgrund des Basisergänzungssatzes kann man $V = U \oplus W'$ mit einem K-Untervektorraum W' schreiben, und man hat eine Projektion (längs W')

$$\pi\colon V \longrightarrow U$$

mit $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_U$, wobei ι die Einbettung $U \subseteq W$ bezeichnet. Wir betrachten die lineare Abbildung (mit $n = \mathrm{ord}\,(G)$; dies ist eine Einheit in K)

$$\psi\colon V \longrightarrow V,\, v \longmapsto \frac{1}{n}\sum_{g\in G} g^{-1}(\pi(g(v))).$$

Für $u \in U$ ist (wegen $g(u) \in U$ und da π auf U die Identität ist)

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \frac{1}{n}\sum_{g\in G} g^{-1}(\pi(g(u))) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{g\in G} g^{-1}(g(u)) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{g\in G} u \\ &= u \end{aligned}$$

und das Bild von ψ ist gleich U, d.h. ψ ist ebenfalls eine Projektion auf U. Allerdings ist diese Projektion zusätzlich G-verträglich. Für $h \in G$ ist nämlich

$$\begin{aligned} \psi(hv) &= \frac{1}{n}\sum_{g\in G} g^{-1}(\pi(g(hv))) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{f\in G} (hf^{-1})(\pi(f(v))) \\ &= h\left(\frac{1}{n}\sum_{f\in G} f^{-1}(\pi(f(v)))\right) \\ &= h\,(\psi(v))\,. \end{aligned}$$

Wir setzen nun $W := \mathrm{kern}\,\psi$. Als Kern einer mit der Operation verträglichen linearen Abbildung ist W nach Lemma 30.5 ebenfalls G-invariant, und es ist offenbar $V = U \oplus W$. □

Satz 30.7. *Es sei K ein Körper und G eine endliche Gruppe, deren Ordnung kein Vielfaches der Charakteristik von K sei. Dann ist G linear reduktiv.*

Beweis. Es sei

$$\rho\colon G \longrightarrow \mathrm{GL}\,(V)$$

eine Darstellung von G. Wir müssen zeigen, dass die Darstellung vollständig reduzibel ist, also eine direkte Summe aus irreduziblen Darstellungen ist. Wir beweisen die Aussage durch Induktion über die Dimension von V. Bei $\dim\,(V) = 0, 1$ ist nichts zu zeigen. Wenn die Darstellung irreduzibel ist, so sind wir ebenfalls fertig. Andernfalls gibt es einen echten G-invarianten

Untervektorraum $U \subset V$. Dieser hat nach Lemma 30.6 ein G-invariantes Komplement $W \subseteq V$. Nach Induktionsvoraussetzung besitzen U und W eine direkte Zerlegung in irreduzible Darstellungen. Dies überträgt sich auf V. $\square$

Darstellungstheorie kommutativer Gruppen

Kommutative besitzen eine einfachere Darstellungstheorie, da nur eindimensionale Darstellungen irreduzibel sind. Dies ergibt sich aus dem sogenannten *Lemma von Schur* (der nächsten Aussage). Die Konsequenzen für die kommutativen affin-algebraischen Gruppen (beispielsweise die multiplikative und die additive Gruppe) sind aber unterschiedlich.

Issai Schur (1875-1941)

LEMMA 30.8. *Es sei K ein Körper, G eine Gruppe und seien V_1, V_2 zwei K-Vektorräume mit zwei gegebenen irreduziblen Darstellungen $\rho_1\colon G \to \mathrm{GL}(V_1)$ und $\rho_2\colon G \to \mathrm{GL}(V_2)$. Es sei $\varphi\colon V_1 \to V_2$ eine lineare Abbildung mit*

$$\sigma_2 \circ \varphi = \varphi \circ \sigma_1$$

für alle $\sigma \in G$, wobei σ_i den zu σ gehörenden Automorphismus auf V_i bezeichnet. Dann ist $\varphi = 0$ oder aber φ definiert eine Äquivalenz der beiden Darstellungen.

Beweis. Es sei $\varphi \neq 0$. Wir müssen zeigen, dass φ ein Isomorphismus ist. Es sei $U := \operatorname{kern} \varphi$. Nach Lemma 30.5 ist U G-invariant. Wegen der Irreduzibilität von ρ_1 ist $U = 0$ oder $U = V_1$, wobei die zweite Möglichkeit wegen $\varphi \neq 0$ ausscheidet. Also ist der Kern trivial und damit ist nach Lemma 12.7 (Mathematik (Osnabrück 2009-2011)) φ injektiv. Es sei jetzt $W := \operatorname{bild} \varphi$. Nach Lemma 30.5 ist W ebenfalls G-invariant. Der Fall $W = 0$ ist wegen $\varphi \neq 0$ ausgeschlossen, also ist $W = V_2$ wegen der Irreduzibilität von ρ_2 und somit ist φ auch surjektiv. □

Korollar 30.9. *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, G eine Gruppe und V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei $\rho \colon G \to \mathrm{GL}(V)$ eine irreduzible Darstellung und es sei $\varphi \colon V \to V$ eine lineare Abbildung mit*

$$\sigma \circ \varphi = \varphi \circ \sigma$$

für alle $\sigma \in G$. Dann ist φ eine Streckung.

Beweis. Wir können $\varphi \neq 0$ annehmen. Aufgrund der Voraussetzung an K besitzt φ einen Eigenwert λ. Wir betrachten $\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$. Da eine Streckung mit jedem Endomorphismus vertauscht, gilt für $\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$ ebenfalls die Voraussetzung. Nach Lemma 30.8 ist also $\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V$ ein Isomorphismus oder gleich 0. Da es einen nichttrivialen Kern (nämlich den Eigenraum zu λ) besitzt, muss $\varphi - \lambda \operatorname{Id}_V = 0$ sein, also ist φ ein skalares Vielfaches der Identität. □

Korollar 30.10. *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und G eine kommutative Gruppe. Dann ist jede irreduzible Darstellung von G in einen endlichdimensionalen K-Vektorraum eindimensional.*

Beweis. Es sei

$$\rho \colon G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$$

eine irreduzible Darstellung. Wegen der Kommutativität von G gilt für die zu $\sigma, \tau \in G$ gehörenden linearen Abbildungen

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma.$$

Aus Korollar 30.9, angewandt für festes τ und alle σ, folgt, dass τ eine Streckung ist. Dann sind aber überhaupt sämtliche Automorphismen der Darstellung Streckungen. Unter einer Streckung ist aber jeder Untervektorraum invariant, so dass in diesem Fall jeder Untervektorraum G-invariant ist. Dann muss aber wegen der Irreduzibilität V eindimensional sein. □

Abbildungsverzeichnis