Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

5. Februar 2011

Mathematik III

Testklausur 2

Dauer: Zwei volle Stunden + 10 Minuten Orientierung, in denen noch nicht geschrieben werden darf.

Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Alle Antworten sind zu begründen.

Es gibt insgesamt 64 Punkte. Es gilt die Sockelregelung, d.h. die Bewertung pro Aufgabe(nteil) beginnt bei der halben Punktzahl. Die Gesamtpunktzahl geht doppelt in Ihre Übungspunktzahl ein.

Zur Orientierung: Zum Bestehen braucht man 16 Punkte, ab 32 Punkten gibt es eine Eins.

Tragen Sie auf dem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer leserlich ein.

Viel Erfolg!

Name, Vorname: ....

Matrikelnummer: ....

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	$\sum$
mögl. Pkt.:	4	4	2	6	6	4	6	5	5	6	8	4	4	64
erhalt. Pkt.:														

Note:

Aufgabe 1. (4 Punkte)

Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Der *Tangentialraum* in einem Punkt $P \in M$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M.
(2) Eine *abgeschlossene Untermannigfaltigkeit* $M \subseteq N$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit N.
(3) Ein *orientierter* Atlas einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M.
(4) Die *zurückgezogene Differentialform* $\varphi^*\omega$ zu einer Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ bezüglich einer stetig differenzierbaren Abbildung $\varphi : L \to M$ zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten L und M.
(5) Das *Wegintegral* zu einer 1-Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M bezüglich einer stetig differenzierbaren Kurve $\gamma : [a, b] \to M$.
(6) Eine *positive Volumenform* auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M der Dimension n.
(7) Eine *riemannsche Mannigfaltigkeit.*
(8) Die *äußere Ableitung* zu einer stetig differenzierbaren Differentialform $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M.

Aufgabe 2. (4 Punkte)

Formuliere die folgenden Sätze bzw. Formeln.

(1) Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis des Vektorraumes V. Wie sieht eine Basis des k-ten Dachproduktes $\bigwedge^k V$ aus?
(2) Die *universelle Eigenschaft* des k-ten Dachproduktes eines Vektorraums V.
(3) Die *Formel für die zurückgenommene Volumenform* $\varphi^*\omega$ zu $\omega = f dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$ unter einer stetig differenzierbaren Abbildung
$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$
(4) Die *Berechnung des kanonischen Volumens* einer messbaren Menge $T \subseteq M$ einer riemannschen Mannigfaltigkeit M, die ganz in einem offenen Kartengebiet $T \subseteq U$ liegt.

Aufgabe 3. (2 Punkte)

Es sei K die Kugel mit Radius r und Mittelpunkt $0 = (0, 0, 0)$ im $\mathbb{R}^3$. Wie lautet die Formel (ohne Begründung) für

a) das Volumen der Vollkugel.

b) den Flächeninhalt der Kugeloberfläche.

Aufgabe 4. (6 Punkte)
Zeige, dass die Menge

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^4 + z^6 = 1\}$$

eine zweidimensionale kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 5. (6 Punkte)
Zeige, dass die Tangentialabbildung $T(\varphi)$ zu

$$\varphi : \mathbb{R}^1 \longrightarrow S^1,\, t \longmapsto (\cos t\,,\, \sin t\,),$$

surjektiv ist.

Aufgabe 6. (4 Punkte)
Bestimme, ob die beiden Basen des $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix},$$

die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht.

Aufgabe 7. (6 Punkte)
Berechne die zurückgezogene Differentialform $\varphi^*\tau$ zu
$\tau = dx \wedge dy \wedge dz - wdx \wedge dy \wedge dw + \cos(xy)\, dx \wedge dz \wedge dw - ywdy \wedge dz \wedge dw$
unter der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4,\, (r,s,t) \longmapsto (r^2 s, t, \sin r\,, e^{st}) = (x,y,z,w).$$

Aufgabe 8. (5 Punkte)
Berechne das Wegintegral $\int_\gamma \omega$ zu

$$\gamma : [-1,0] \longrightarrow \mathbb{R}^3,\, t \longmapsto (-t^2, t^3 - 1, t + 2),$$

für die 1-Differentialform

$$\omega = x^3 dx - yzdy + xz^2 dz$$

auf dem $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 9. (5 Punkte)

Zeige, dass der Flächeninhalt der Rotationsfläche, die entsteht, wenn man den Graphen

$$\Gamma = \{(x, e^x) | \, x \leq 0\}$$

um die x-Achse rotieren lässt, kleiner als 10 ist.

Aufgabe 10. (6 (2+2+2) Punkte)

Wir betrachten den Graph M der Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \, (u, v) \longmapsto u^2 + uv - v^3,$$

als zweidimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, also

$$M = \{(u, v, u^2 + uv - v^3) | \, (u, v) \in \mathbb{R}^2\}$$

mit der vom $\mathbb{R}^3$ induzierten riemannschen Metrik. Es sei

$$\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow M, \, (u, v) \longmapsto (u, v, u^2 + uv - v^3),$$

die zugehörige Diffeomorphie.

a) Bestimme das totale Differential zu ψ sowie die Bildvektoren $T_P(\psi)(e_1)$ und $T_P(\psi)(e_2)$ in $T_{\psi(P)}M$.

b) Bestimme für jeden Punkt der Form $P = (u, 0)$ den Flächeninhalt des von $T_P(\psi)(e_1)$ und $T_P(\psi)(e_2)$ in $T_{\psi(P)}M$ aufgespannten Parallelogramms.

c) Bestimme für jeden Punkt der Form $P = (0, v)$ den Flächeninhalt des von $T_P(\psi)(e_1)$ und $T_P(\psi)(e_2)$ in $T_{\psi(P)}M$ aufgespannten Parallelogramms.

Aufgabe 11. (8 Punkte)

Sei M eine kompakte differenzierbare Mannigfaltigkeit mit einer stetigen positiven Volumenform ω. Zeige, dass

$$\int_M \omega < \infty$$

ist.

Aufgabe 12. (4 Punkte)

Es seien $W \subseteq \mathbb{R}^m$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und sei

$$\psi : W \longrightarrow U$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei

$$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Folgere aus der Kettenregel, dass

$$d(\psi^* f) = \psi^*(df)$$

gilt, wobei ψ^* das Zurückziehen von Differentialformen bezeichnet.

Aufgabe 13. (4 Punkte)

Berechne die äußere Ableitung $d\omega$ der Differentialform

$$\omega = \frac{x^2}{y} dx - \frac{x}{y^2} dy$$

auf $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq 0\}$.