Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Vorlesung 15

Operationen auf dem Spektrum

Es sei G eine Gruppe, die auf einem kommutativen Ring als Gruppe von Ringautomorphismen operiere. Zu jedem $\sigma \in G$ liegt also ein Ringautomorphismus

$$\varphi_\sigma \colon R \longrightarrow R$$

vor, der wiederum zu einer Spektrumsabbildung

$$\varphi_\sigma^* \colon \operatorname{Spek}(R) \longrightarrow \operatorname{Spek}(R)$$

führt, die eine Homöomorphie ist. Die Operation von G auf R ergibt als eine Operation von G auf $\operatorname{Spek}(R)$ als Gruppe von Homöomorphismen. Da wir die Operation auf dem Ring von rechts schreiben, und das Spektrum kontravariant ist, ist es natürlich, die Operation auf dem affinen Schema von links zu schreiben. Wir werden gleich sehen, dass man bei einer linearen Operation auf einem Vektorraum und der zugehörigen Operation auf dem Polynomring über das Spektrum die ursprüngliche Operation zurückgewinnt.

Lemma 15.1. *Es sei K ein Körper und V und W seien zwei endlichdimensionale K-Vektorräume. Es sei*

$$\psi \colon V \longrightarrow W$$

eine K-lineare Abbildung und

$$\varphi \colon K[W] \longrightarrow K[V]$$

der zugehörige K-Algebrahomomorphismus zwischen den Polynomringen und

$$\varphi^* \colon \operatorname{Spek}(K[V]) \longrightarrow \operatorname{Spek}(K[W])$$

die zugehörige Spektrumsabbildung. Dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \stackrel{\psi}{\longrightarrow} & W \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Spek}(K[V]) & \stackrel{\varphi^*}{\longrightarrow} & \operatorname{Spek}(K[W]) \, , \end{array}$$

wobei die vertikalen Abbildungen die natürlichen Einbettungen sind.

Beweis. Es seien $\mathfrak{m}_v = \{F \in K[V] | \, F(v) = 0\}$ und $\mathfrak{m}_w = \{G \in K[W] | G(w) = 0\}$ die zu den Vektoren v bzw. w gehörigen maximalen Ideale. Die Aussage folgt aus

$$\begin{aligned} \varphi^*(\mathfrak{m}_v) &= \varphi^{-1}(\mathfrak{m}_v) \\ &= \{G \in K[W] | \, \varphi(G) \in \mathfrak{m}_v\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \{G \in K[W] \mid \varphi(G)(v) = 0\} \\
&= \{G \in K[W] \mid (G \circ \psi)(v) = 0\} \\
&= \{G \in K[W] \mid G(\psi(v)) = 0\} \\
&= \mathfrak{m}_{\psi(v)}.
\end{aligned}$$

□

Proposition 15.2. *Es sei K ein Körper, V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum, auf dem eine Gruppe G linear operiere. Es sei*

$$K[V] \times G \longrightarrow K[V]$$

die zugehörige Operation auf dem Polynomring $K[V]$ und

$$G \times \operatorname{Spek}(K[V]) \longrightarrow \operatorname{Spek}(K[V])$$

die zugehörige Operation auf dem Spektrum. Dann liegt über die natürliche Einbettung $V \subseteq \operatorname{Spek}(K[V])$ eine Fortsetzung der Operation vor.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Lemma 15.1. □

Quotient und Invariantenring bei endlichen Gruppen

Es sei R ein kommutativer Ring, G eine endliche Gruppe, die auf R und damit auch auf $X = \operatorname{Spek}(R)$ als Gruppe von Automorphismen operiere. Dann hat man einerseits den topologischen Quotienten X/G und andererseits den Invariantenring R^G und damit dessen Spektrum $\operatorname{Spek}\left(R^G\right)$. Wir zeigen nach einigen Vorbereitungen, dass diese zwei geometrischen Objekte gleich sind, also dass

$$X/G = \operatorname{Spek}\left(R^G\right)$$

gilt. Dabei werden wir zeigen, dass die Spektrumsabbildung

$$\iota^*\colon \operatorname{Spek}(R) \longrightarrow \operatorname{Spek}\left(R^G\right)$$

(die zur Inklusion $R^G \subseteq R$ gehört) die Eigenschaften eines topologischen Quotienten erfüllt.

Korollar 15.3. *Es sei R ein kommutativer Ring, auf dem eine endliche Gruppe G durch Ringautomorphismen operiere. Dann ist die Spektrumsabbildung*

$$\iota^*\colon \operatorname{Spek}(R) \longrightarrow \operatorname{Spek}\left(R^G\right)$$

surjektiv und abgeschlossen. Insbesondere trägt $\operatorname{Spek}\left(R^G\right)$ die Bildtopologie unter dieser Abbildung.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 12.1 und aus Satz 14.9. □

Für die nächste Aussage über die Fasern und Bahnen bei einer endlichen Gruppenoperation benötigen wir das Lemma über die *Primvermeidung*.

Lemma 15.4. *Es sei R ein kommutativer Ring, $\mathfrak{a}$ ein Ideal und $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ eine endliche Familie von Primidealen. Es gelte $\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$. Dann ist $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$ für ein i.*

Beweis. Wir führen Induktion über n. Bei $i = 1$ ist die Aussage trivial. Sei die Aussage für n Primideale bewiesen, und seien $n+1$ Primideale gegeben. Für jedes i können wir annehmen, dass $\mathfrak{a} \not\subseteq \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$ ist, da anderfalls die Aussage nach Induktionsvoraussetzung bewiesen ist. Demnach gibt es jeweils ein $f_i \in \mathfrak{a}$ mit $f_i \notin \bigcup_{j \neq i} \mathfrak{p}_j$. Dann muss insbesondere $f_i \in \mathfrak{p}_i$ sein. Das Element $f_1 + f_2 f_3 \cdots f_{n+1}$ gehört zu $\mathfrak{a}$ und damit ist auch $f_1 + f_2 f_3 \cdots f_{n+1} \in \mathfrak{p}_i$ für ein i. Dies ist aber sowohl bei $i = 1$ als auch bei $i \geq 2$ ein Widerspruch. $\square$

Lemma 15.5. *Es sei R ein kommutativer Ring, auf dem eine endliche Gruppe G durch Ringautomorphismen operiere und es sei*

$$\iota^* \colon \operatorname{Spek}(R) \longrightarrow \operatorname{Spek}\left(R^G\right)$$

die zugehörige Spektrumsabbildung. Dann gilt für $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spek}(R)$ die Äquivalenz: $\iota^*(\mathfrak{p}) = \iota^*(\mathfrak{q})$ genau dann, wenn es ein $\sigma \in G$ gibt mit $\sigma^*(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$. Das heißt, dass die Bahnen der Operation von G auf $\operatorname{Spek}(R)$ mit den Fasern von ι^* übereinstimmen.

Beweis. Wenn $\sigma^*(\mathfrak{p}) = \sigma^{-1}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$ ist und $f \in R^G \cap \mathfrak{q}$, so ist auch $f = \sigma(f) \in \mathfrak{p}$, also ist

$$\iota^*(\mathfrak{p}) \;=\; R^G \cap \mathfrak{p} \;=\; R^G \cap \mathfrak{q} \;=\; \iota^*(\mathfrak{q}).$$

Primideale in derselben Bahn besitzen also den gleichen Bildpunkt unter der Spektrumsabbildung.

Zum Beweis der Umkehrung betrachten wir die Faser über $\mathfrak{r} \in \operatorname{Spek}\left(R^G\right)$ und es sei $\mathfrak{p}$ ein Element dieser Faser, welches es nach Korollar 15.3 gibt. Wir müssen zeigen, dass jedes Primideal $\mathfrak{q}$ der Faser in der Bahn durch $\mathfrak{p}$ liegt, dass es also ein $\sigma \in G$ gibt mit $\sigma^*(\mathfrak{p}) = \mathfrak{q}$. Wir nehmen an, dass dies nicht der Fall sei, und es sei $\mathfrak{q}$ ein Primideal der Faser, das aber nicht zur Bahn gehört. Aus $\mathfrak{q} \neq \sigma^*(\mathfrak{p})$ (für alle $\sigma \in G$) folgt $\mathfrak{q} \not\subseteq \sigma^*(\mathfrak{p})$, da andernfalls die Faser im Widerspruch zu Lemma 14.11 nicht nulldimensional wäre. Nach Lemma 15.4 ist dann auch

$$\mathfrak{q} \not\subseteq \bigcup_{\sigma \in G} \sigma^*(\mathfrak{p}) \;=:\; T.$$

Sei $f \in \mathfrak{q}$, $f \notin T$. Die Menge T wird unter der Gruppenoperation auf sich selbst abgebildet, daher ist auch $\sigma(f) \notin T$. Somit ist auch $g = \prod_{\sigma \in G} \sigma(f) \notin T$. Andererseits ist aber $g \in R^G$ und $g \in \mathfrak{q}$, also $g \in R^G \cap \mathfrak{q} = \mathfrak{r} \subseteq \mathfrak{p} \subseteq T$. $\square$

Satz 15.6. *Es sei R ein kommutativer Ring, auf dem eine endliche Gruppe G durch Ringautomorphismen operiere und es sei*

$$\iota^* \colon \operatorname{Spek}(R) \longrightarrow \operatorname{Spek}\left(R^G\right)$$

die zugehörige Spektrumsabbildung. Dann ist $\left(\operatorname{Spek}\left(R^G\right), \iota^*\right)$ *der Quotient der Gruppenoperation von* G *auf* $\operatorname{Spek}(R)$*.*

Beweis. Die Abbildung

$$\iota^* \colon \operatorname{Spek}(R) \longrightarrow \operatorname{Spek}\left(R^G\right)$$

ist nach Korollar 15.3 surjektiv, so dass nach Lemma 15.5 die Punkte aus $\operatorname{Spek}\left(R^G\right)$ den Bahnen der Gruppenoperation entsprechen. Daher ist Spek $\left(R^G\right)$ ein mengentheoretischer Quotient. Nach Korollar 15.3 trägt $\operatorname{Spek}\left(R^G\right)$ die Bildtopologie, so dass es sich auch um einen topologischen Quotienten handelt. $\square$

Aus den vorstehenden Aussagen folgt insbesondere, dass die Fasern der Spektrumsabbildung

$$\operatorname{Spek}(R) \longrightarrow \operatorname{Spek}\left(R^G\right)$$

aus endlich vielen Elementen bestehen, und zwar ist deren Anzahl maximal gleich der Anzahl der Elemente der Gruppe G.

Quotient und Invariantenring allgemein

Wenn die Gruppe nicht endlich ist, so ist das Spektrum des Invariantenringes im Allgemeinen nicht der Quotient der Gruppenoperation. Es ist ein eigenständiges, umfassendes Problem, den Quotienten zu einer algebaischen Gruppenoperation zu bestimmen, die unter der Bezeichnung *geometrische Invariantentheorie* firmiert. Zwar existiert stets der Bahnenraum, der mit der Bildtopologie versehen der Quotient in der Kategorie der topologischen Räume ist, doch wünscht man sich auch eine algebraische Struktur auf dem Quotienten (beispielsweise möchte man über „polynomiale Funktionen“ auf dem Quotienten sprechen können). Schon einfache Beispiele zeigen, dass man einen sinnvollen algebraisch-geometrischen Quotienten nur erwarten kann, wenn man die Operation auf eine offene (möglichst große) Teilmenge einschränkt. Um den Quotienten zu beschreiben reichen die affinen Varietäten nicht aus, und nur solche kann man über Invariantenringe gewinnen. Stattdessen muss man in der Kategorie der quasiprojektiven Varietäten bzw. der Schemata einen Quotienten konstruieren.

Beispiel 15.7. Die Operation der Einheitengruppe $K^\times$ eines Körpers K auf dem K^n $(n \geq 2)$ durch skalare Multiplikation besitzt den Nullpunkt als Fixpunkt und die Geraden durch den Nullpunkt ohne diesen als weitere Bahnen. Die zugehörige Operation auf dem Polynomring $R = K[X_1, \ldots, X_n]$ (vergleiche Beispiel 5.9) besitzt bei unendlichem K nur die Konstanten als invariante Polynome. Die Spektrumsabbildung

$$\operatorname{Spek}(R) \longrightarrow \operatorname{Spek}\left(R^G\right)$$

ist also konstant und vermag nicht die Bahnen zu trennen. Nach Aufgabe 5.12 gibt es bei $K = \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) noch nicht einmal stetige Funktionen des $\mathbb{R}^n$ in einen metrischen Raum, die die Bahnen trennen.

Wenn man hingegen den Nullpunkt herausnimmt, so ist der Bahnenraum nach Definition der projektive Raum über K, einer der wichtigsten Räume überhaupt. Dieser ist nicht das Spektrum eines kommutativen Ringes, er wird aber überdeckt durch offene Teilmengen, die Spektren zu kommutativen Ringen sind. Ein solches geometrisches Objekt nennt man ein *Schema*. Die skalare Multiplikation auf dem punktierten affinen Raum besitzt also einen sinnvollen Quotienten in der Kategorie der Schemata.

Dennoch besitzt das Spektrum des Invariantenringes viele Eigenschaften, die man auch von einem Quotienten erwartet. Z.B. ist die Spektrumsabbildung

$$\text{Spec } R \longrightarrow \text{Spec } R^G$$

surjektiv, wenn R^G ein direkter Summand in R ist, wenn also ein Reynolds-Operator existiert. Dies ist nicht nur bei endlichen (nicht modularen) Gruppen der Fall, sondern auch bei diagonalisierbaren Operationen, die den Graduierungen entsprechen, und allgemeiner bei den sogenannten linear-reduktiven Gruppen, die wir später einführen werden.

LEMMA 15.8. *Es seien R, S kommutative Ringe und $R \subseteq S$ ein direkter Summand. Dann ist die Spektrumsabbildung*

$$\text{Spek}\,(S) \longrightarrow \text{Spek}\,(R)$$

surjektiv.

Beweis. Es sei

$$S \,\cong\, R \oplus V$$

mit einem R-Modul V. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R. Nach Aufgabe 6.11 und nach Aufgabe 6.12 sind auch

$$R_{\mathfrak{p}} \longrightarrow S_{R \setminus \mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}} \oplus V_{\mathfrak{p}}$$

und

$$\kappa(\mathfrak{p}) = R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \longrightarrow S_{R\setminus\mathfrak{p}}/\left(\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\right) S_{R\setminus\mathfrak{p}} = R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \oplus V_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}V_{\mathfrak{p}}$$

direkte Summanden. Daher ist insbesondere der Ring rechts nicht 0 und somit ist nach Proposition 13.4 (6) und nach Korollar 14.4 die Faser über $\mathfrak{p}$ nicht leer. □

Das folgende Beispiel, das an Beispiel 6.9 anschließt, zeigt, dass die Spektrumsabbildung zum Invariantenring zu einer Operation der additiven Gruppe $(K, +)$ nicht surjektiv sein muss.

BEISPIEL 15.9. Es sei K ein Körper der Charakteristik 0 und $A = K[X, Y]$. Auf der A-Algebra

$$B \,=\, A[S, T]/(XS + YT + 1) \,=\, K[X, Y, S, T]/(XS + YT + 1)$$

operiert die additive Gruppe $(K,+)$, indem ein $\lambda \in K$ durch

$$X \mapsto X,\ Y \mapsto Y,\ S \mapsto S + \lambda Y,\ T \mapsto T - \lambda X$$

wirkt. Wie in Beispiel 6.9 gezeigt wurde, ist der Invariantenring unter dieser Gruppenoperation gleich $A = K[X,Y]$. Die Spektrumsabbildung

$$\operatorname{Spek}(B) \longrightarrow \operatorname{Spek}(A)$$

ist nicht surjektiv. Für das maximale Ideal

$$\mathfrak{m} \,=\, (X,Y) \,\subset\, A$$

ist das Erweiterungsideal $(X,Y)B$ offenbar gleich dem Einheitsideal. Somit ist die Faser über $\mathfrak{m}$ nach Korollar 14.4 leer. Zu jedem anderen Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spek}(A)$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ ist die Faser gleich $\kappa(\mathfrak{p})[S,T]/(\psi(X)S + \psi(Y)T + 1)$, wobei

$$\psi\colon\ A = K[X,Y] \longrightarrow \kappa(\mathfrak{p})$$

der kanonische Ringhomomorphismus in den Restekörper ist. Nach Voraussetzung ist mindestens eines der $\psi(X), \psi(Y)$ eine Einheit, so dass eine Isomorphie zu $\kappa(\mathfrak{p})[U]$ vorliegt. Die Fasern sind also affine Geraden. Diese sind wiederum genau die Bahnen der Operation, so dass die offene Teilmenge

$$D(\mathfrak{m}) \subset \operatorname{Spek}(A)$$

der Quotient der Operation ist.