

Mathematik III**Arbeitsblatt 70**

In diesem Arbeitsblatt geht es ausschließlich um das Lebesgue-Integral, es darf nicht mit dem Riemann-Integral argumentiert werden.

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 70.1. Es seien M und N Mengen und es seien

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

und

$$f : N \longrightarrow \mathbb{R}$$

Abbildungen. Zeige, dass für die Subgraphen die Beziehung

$$(\varphi \times \text{Id}_{\mathbb{R}})^{-1}(S(f)) = S(f \circ \varphi)$$

gilt.

AUFGABE 70.2. Zeige, dass das Integral einer messbaren Funktion über eine Nullmenge gleich 0 ist.

AUFGABE 70.3. Zeige, dass das Integral der Nullfunktion gleich 0 ist.

AUFGABE 70.4. Es sei M eine abzählbare Menge, die mit dem Zählmaß versehen sei, und sei

$$f : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass f genau dann integrierbar ist, wenn die Familie $f(m)$, $m \in M$, summierbar ist, und dass in diesem Fall das Integral gleich der Summe ist.

AUFGABE 70.5. Bestimme den Flächeninhalt des Subgraphen zur linearen Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto cx,$$

über dem Intervall $[a, b]$.

AUFGABE 70.6. Bestimme den Flächeninhalt des Subgraphen zur Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 1 + \sin x,$$

über dem Intervall $[0, 2\pi]$.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 70.7. (3 Punkte)

Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und sei

$$f : T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass f integrierbar ist. Man gebe auch eine Abschätzung für das Integral $\int_T f d\lambda^n$ an.

AUFGABE 70.8. (4 Punkte)

Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum. Zeige, dass für jedes $r \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$M \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R}, (x, t) \longmapsto (x, t + r),$$

maßtreu ist.

AUFGABE 70.9. (4 Punkte)

Bestimme das Volumen des Subgraphen zur linearen Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto cx + dy,$$

(mit $c, d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) über dem Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$.

AUFGABE 70.10. (6 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \sin t.$$

Für welches $a \in [0, 1]$ ist die Tschebyschow-Abschätzung für diese Funktion am besten? Bestimme a numerisch bis auf 5 Nachkommastellen.