Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 12

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 12.1. Zeige, dass es in $\mathbb{Q}$ kein Element x mit $x^2 = 2$ gibt.

Aufgabe 12.2. Berechne von Hand die Approximationen x_1, x_2, x_3, x_4 im Heron-Verfahren für die Quadratwurzel von 5 zum Startwert $x_0 = 2$.

Aufgabe 12.3. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge. Zeige, dass die Folge genau dann gegen x konvergiert, wenn es für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung $|x_n - x| \leq \frac{1}{k}$ gilt.

Aufgabe 12.4. Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{n^2}$$

gegebene Folge ($n \geq 1$) auf Konvergenz.

Aufgabe 12.5. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei konvergente reelle Folgen mit $x_n \geq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass dann $\lim_{n \to \infty} x_n \geq \lim_{n \to \infty} y_n$ gilt.

Aufgabe 12.6. Es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ drei reelle Folgen. Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

Aufgabe 12.7. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen mit Grenzwert x. Zeige, dass dann auch die Folge

$$(|x_n|)_{n \in \mathbb{N}}$$

konvergiert, und zwar gegen $|x|$.

In den beiden folgenden Aufgaben geht es um die Folge der Fibonacci-Zahlen.

Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* f_n ist rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1\,, f_2 := 1 \text{ und } f_{n+2} := f_{n+1} + f_n\,.$$

Aufgabe 12.8. Beweise durch Induktion die *Simpson-Formel* oder Simpson-Identität für die Fibonacci-Zahlen f_n. Sie besagt ($n \geq 2$)

$$f_{n+1} f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n\,.$$

Aufgabe 12.9. Beweise durch Induktion die *Binet-Formel* für die Fibonacci-Zahlen. Diese besagt, dass

$$f_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}$$

gilt ($n \geq 1$).

Aufgabe 12.10. Man untersuche die folgenden Teilmengen $M \subseteq \mathbb{R}$ auf die Begriffe obere Schranke, untere Schranke, Supremum, Infimum, Maximum und Minimum.

(1) $\{2, -3, -4, 5, 6, -1, 1\}$,
(2) $\left\{\frac{1}{2}, \frac{-3}{7}, \frac{-4}{9}, \frac{5}{9}, \frac{6}{13}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$,
(3) $]-5, 2]$,
(4) $\left\{\frac{1}{n} | \, n \in \mathbb{N}_+\right\}$,
(5) $\left\{\frac{1}{n} | \, n \in \mathbb{N}_+\right\} \cup \{0\}$,
(6) $\mathbb{Q}_-$,
(7) $\{x \in \mathbb{Q} | \, x^2 \leq 2\}$,
(8) $\{x \in \mathbb{Q} | \, x^2 \leq 4\}$,
(9) $\{x^2 | \, x \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.11. (3 Punkte)

Untersuche die durch

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

gegebene Folge ($n \geq 1$) auf Konvergenz.

Aufgabe 12.12. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch

$$x_n = \frac{7n^3 - 3n^2 + 2n - 11}{13n^3 - 5n + 4}$$

definierten reellen Folge.

Aufgabe 12.13. (4 Punkte)

Zeige, dass die reelle Folge

$$\left(\frac{n}{2^n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

gegen 0 konvergiert.

Aufgabe 12.14. (6 Punkte)

Untersuche die durch

$$x_n = \frac{\sqrt{n}^n}{n!}$$

gegebene Folge auf Konvergenz.

Aufgabe 12.15. (5 Punkte)

Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen und sei die Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $z_{2n-1} := x_n$ und $z_{2n} := y_n$. Zeige, dass $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergiert, wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert konvergieren.

Aufgabe 12.16. (3 Punkte)

Bestimme den Grenzwert der durch

$$x_n = \frac{2n + 5\sqrt{n} + 7}{-5n + 3\sqrt{n} - 4}$$

definierten reellen Folge.