Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 9

Lineare Abbildungen

DEFINITION 9.1. Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Eine Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

heißt *lineare Abbildung*, wenn die beiden folgenden Eigenschaften erfüllt sind.

(1) $\varphi(u+v) = \varphi(u) + \varphi(v)$ für alle $u, v \in V$.
(2) $\varphi(sv) = s\varphi(v)$ für alle $s \in K$ und $v \in V$.

Die erste Eigenschaft nennt man dabei die *Additivität* und die zweite Eigenschaft die *Verträglichkeit mit Skalierung*. Wenn man den Grundkörper betonen möchte spricht man von K-Linearität. Die Identität $\mathrm{Id}_V : V \to V$, die Nullabbildung $V \to 0$ und die Inklusionen $U \subseteq V$ von Untervektorräumen sind die einfachsten Beispiele für lineare Abbildungen.

BEISPIEL 9.2. Es sei K ein Körper und sei K^n der n-dimensionale Standardraum. Dann ist die i-te *Projektion*, also die Abbildung

$$K^n \longrightarrow K,\ (a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \longmapsto a_i,$$

eine K-lineare Abbildung. Dies folgt unmittelbar aus der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation auf dem Standardraum. Die i-te Projektion heißt auch die i-te *Koordinatenfunktion*.

LEMMA 9.3. *Es sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K. Es seien*

$$\varphi : U \to V \text{ und } \psi : V \to W$$

lineare Abbildungen. Dann ist auch die Verknüpfung

$$\psi \circ \varphi : U \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung.

Beweis. Siehe Aufgabe 9.7. □

LEMMA 9.4. *Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine bijektive lineare Abbildung. Dann ist auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1} : W \longrightarrow V$$

linear.

Beweis. Siehe Aufgabe 10.3. □

Festlegung auf einer Basis

Hinter der folgenden Aussage (dem *Festlegungssatz*) steckt das wichtige Prinzip, dass in der linearen Algebra (von endlichdimensionalen Vektorräumen) die Objekte durch endlich viele Daten bestimmt sind.

SATZ 9.5. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K. Es sei v_i, $i \in I$, eine endliche Basis von V und es seien w_i, $i \in I$, Elemente in W. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung*

$$f : V \longrightarrow W$$

mit

$$f(v_i) = w_i \text{ für alle } i \in I\,.$$

Beweis. Da $f(v_i) = w_i$ sein soll und eine lineare Abbildung für jede Linearkombination die Eigenschaft

$$f\left(\sum_{i \in I} s_i v_i\right) = \sum_{i \in I} s_i f(v_i)$$

erfüllt, und jeder Vektor $v \in V$ sich als eine solche Linearkombination schreiben lässt, kann es maximal nur eine solche lineare Abbildung geben. Wir definieren nun umgekehrt eine Abbildung

$$f : V \longrightarrow W,$$

indem wir jeden Vektor $v \in V$ mit der gegebenen Basis als

$$v = \sum_{i \in I} s_i v_i$$

schreiben und

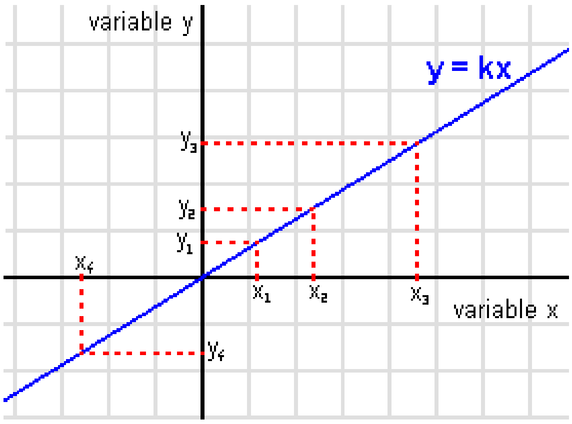
$$f(v) := \sum_{i \in I} s_i w_i$$

ansetzen. Da die Darstellung von v als eine solche Linearkombination eindeutig ist, ist diese Abbildung wohldefiniert. Zur Linearität. Für zwei Vektoren $u = \sum_{i \in I} s_i v_i$ und $v = \sum_{i \in I} t_i v_i$ gilt

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f\left(\left(\sum_{i \in I} s_i v_i) + (\sum_{i \in I} t_i v_i\right)\right) \\ &= f\left(\sum_{i \in I} (s_i + t_i) v_i\right) \\ &= \sum_{i \in I} (s_i + t_i) f(v_i) \\ &= \sum_{i \in I} s_i f(v_i) + \sum_{i \in I} t_i f(v_i) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f\left(\sum_{i\in I} s_i v_i\right) + f\left(\sum_{i\in I} t_i v_i\right) \\
&= f(u) + f(v).
\end{aligned}
$$

Die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation ergibt sich ähnlich. $\square$



Der Funktionsgraph einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die Abbildung ist allein durch den Proportionalitätsfaktor k festgelegt.

BEISPIEL 9.6. Die einfachsten linearen Abbildungen sind (neben der Nullabbildung) diejenigen von K nach K. Eine solche lineare Abbildung

$$\varphi : K \longrightarrow K,\, x \longmapsto \varphi(x),$$

ist aufgrund von Satz 9.5 bzw. direkt aufgrund der Definition durch $\varphi(1)$ bzw. durch den Wert $\varphi(s)$ für ein einziges $s \in K$, $s \neq 0$, festgelegt. Es ist also $\varphi(x) = ax$ mit einem eindeutig bestimmten $a \in K$. Insbesondere im physikalischen Kontext, wenn $K = \mathbb{R}$ ist und wenn zwischen zwei messbaren Größen ein linearer Zusammenhang besteht, spricht man von *Proportionalität*, und a heißt der *Proportionalitätsfaktor*. In der Schule tritt die lineare Beziehung zwischen zwei skalaren Größen als „Dreisatz" auf.

Lineare Abbildungen und Matrizen

Eine lineare Abbildung

$$\varphi : K^n \longrightarrow K^m$$

ist durch die Bilder $\varphi(e_j)$, $j = 1, \ldots, n$, der Standardvektoren eindeutig festgelegt, und jedes $\varphi(e_j)$ ist eine Linearkombination

$$\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} e_i$$

und damit durch die Elemente a_{ij} eindeutig festgelegt. Insgesamt ist also eine solche lineare Abbildung durch mn Elemente a_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, festgelegt. Eine solche Datenmenge kann man wieder als Matrix schreiben. Nach dem Festlegungssatz gilt dies, sobald sowohl im Definitionsraum als auch im Zielraum der linearen Abbildung eine Basis fixiert ist.

Definition 9.7. Es sei K ein Körper und sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und sei W ein m-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$.

Zu einer linearen Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

heißt die $m \times n$-Matrix

$$M = M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) = (a_{ij})_{ij}$$

wobei a_{ij} die i-te Koordinate von $\varphi(v_j)$ bzgl. der Basis $\mathfrak{w}$ ist, die *beschreibende Matrix zu* φ bzgl. der Basen.

Zu einer Matrix $M = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_{m \times n}(K)$ heißt die durch

$$v_j \longmapsto \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

gemäß Satz 9.5 definierte lineare Abbildung $\varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M)$ die *durch* M *festgelegte lineare Abbildung.*

Die Identität auf einem Vektorraum der Dimension n wird bezüglich einer beliebigen Basis durch die Einheitsmatrix beschrieben.

Satz 9.8. *Es sei* K *ein Körper und sei* V *ein* n*-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis* $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ *und sei* W *ein* m*-dimensionaler Vektorraum mit einer Basis* $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$*. Dann sind die in der Definition festgelegten Abbildungen*

$$\varphi \longmapsto M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(\varphi) \text{ und } M \longmapsto \varphi_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}(M)$$

invers zueinander.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Beispiel 9.9. Eine lineare Abbildung

$$\varphi : K^n \longrightarrow K^m$$

wird zumeist durch die Matrix M bzgl. den Standardbasen links und rechts beschrieben. Das Ergebnis der Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ist dann direkt als Punkt in K^m interpretierbar. Die j-te Spalte von M ist das Bild des j-ten Standardvektors e_j.

Untervektorräume unter linearen Abbildungen

LEMMA 9.10. *Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine K-lineare Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Für einen Untervektorraum $S \subseteq V$ ist auch das Bild $\varphi(S) = \{\varphi(v) | \, v \in S\}$ ein Unterraum von W.*
(2) *Insbesondere ist das Bild* bild $\varphi = \varphi(V)$ *der Abbildung ein Unterraum von W.*
(3) *Für einen Unterraum $T \subseteq W$ ist das Urbild $\varphi^{-1}(T) = \{v \in V | \, \varphi(v) \in W\}$ ein Unterraum von V.*
(4) *Insbesondere ist $\varphi^{-1}(0)$ ein Unterraum von V.*

Beweis. Siehe Aufgabe 9.12. □

DEFINITION 9.11. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine K-lineare Abbildung. Dann nennt man

$$\text{kern } \varphi := \varphi^{-1}(0) = \{v \in V | \, \varphi(v) = 0\}$$

den *Kern* von φ.

Der Kern ist also nach der obigen Aussage ein Untervektorraum von V.

Wichtig ist das folgende *Injektivitätskriterium*.

LEMMA 9.12. *Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine K-lineare Abbildung. Dann ist φ injektiv genau dann, wenn kern $\varphi = 0$ *ist.*

Beweis. Wenn die Abbildung injektiv ist, so kann es neben $0 \in V$ keinen anderen Vektor $v \in V$ mit $\varphi(v) = 0$ geben. Also ist $\varphi^{-1}(0) = 0$. Sei umgekehrt kern $\varphi = 0$ und seien $v_1, v_2 \in V$ gegeben mit $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Dann ist wegen der Linearität

$$\varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2) = 0.$$

Daher ist $v_1 - v_2 \in \text{kern } \varphi$ und damit $v_1 = v_2$. □

Die Dimensionsformel

Die folgende Aussage heißt *Dimensionsformel*.

Satz 9.13. *Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine K-lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann gilt

$$\dim(V) = \dim(\text{kern } \varphi) + \dim(\text{bild } \varphi)\,.$$

Beweis. Sei $n = \dim(V)$. Es sei $U = \text{kern } \varphi \subseteq V$ der Kern der Abbildung und $k = \dim(U)$ seine Dimension ($k \leq n$). Es sei

$$u_1, \ldots, u_k$$

eine Basis von U. Aufgrund des Basisergänzungssatzes gibt es Vektoren

$$v_1, \ldots, v_{n-k}$$

derart, dass

$$u_1, \ldots, u_k,\ v_1, \ldots, v_{n-k}$$

eine Basis von V ist.Wir behaupten, dass

$$w_j = \varphi(v_j),\ j = 1, \ldots, n-k\,,$$

eine Basis des Bildes ist. Es sei $w \in W$ ein Element des Bildes $\varphi(V)$. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $\varphi(v) = w$. Dieses v lässt sich mit der Basis als

$$v = \sum_{i=1}^{k} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j$$

schreiben. Dann ist

$$\begin{aligned} w &= \varphi(v) \\ &= \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} s_i u_i + \sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} s_i \varphi(u_i) + \sum_{j=1}^{n-k} t_j \varphi(v_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n-k} t_j w_j, \end{aligned}$$

so dass sich w als Linearkombination der w_j schreiben lässt. Zum Beweis der linearen Unabhängigkeit der w_j, $j = 1, \ldots, n-k$, sei eine Darstellung der Null gegeben,

$$0 = \sum_{j=1}^{n-k} t_j w_j\,.$$

Dann ist

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j\right) = \sum_{j=1}^{n-k} t_j \varphi(v_j) = 0.$$

Also gehört $\sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j$ zum Kern der Abbildung und daher kann man

$$\sum_{j=1}^{n-k} t_j v_j = \sum_{i=1}^{k} s_i u_i$$

schreiben. Da insgesamt eine Basis von V vorliegt, folgt, dass alle Koeffizienten null sein müssen, also sind insbesondere $t_j = 0$. $\square$

Definition 9.14. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine K-lineare Abbildung und V sei endlichdimensional. Dann nennt man

$$\operatorname{rang} \varphi := \dim(\operatorname{bild} \varphi)$$

den *Rang* von φ.

Die Dimensionsformel kann man auch als

$$\dim(V) = \dim(\operatorname{kern} \varphi) + \operatorname{rang} \varphi$$

ausdrücken.

Beispiel 9.15. Wir betrachten die durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ 2y+2z \\ x+3y+4z \\ 2x+4y+6z \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung des Kerns müssen wir das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y+z \\ 2y+2z \\ x+3y+4z \\ 2x+4y+6z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lösen. Der Lösungsraum ist

$$L = \{ s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \}$$

und dies ist der Kern von φ. Der Kern ist also eindimensional und daher ist die Dimension des Bildes nach der Dimensionsformel gleich 2.

KOROLLAR 9.16. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der gleichen Dimension n. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann ist φ genau dann injektiv, wenn φ surjektiv ist.

Beweis. Dies folgt aus Satz 9.13 und Lemma 9.12. $\square$

Abbildungsverzeichnis