Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Vorkurs Mathematik

Arbeitsblatt 4

Injektivität und Surjektivität

Aufgabe 4.1. Eine Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

heißt *streng wachsend*, wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ auch $f(x_1) < f(x_2)$ gilt. Zeige, dass eine streng wachsende Funktion f injektiv ist.

Aufgabe 4.2. Untersuche für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktionen

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto x^n,$$

auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 4.3. Zeige, dass weder die Addition

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto x + y,$$

noch die Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

injektiv ist.

Aufgabe 4.4. Es sei P eine Menge von Personen und V die Menge der Vornamen von diesen Personen und N die Menge der Nachnamen von diesen Personen. Definiere natürliche Abbildungen von P nach V, nach N und nach $V \times N$ und untersuche sie in Hinblick auf die relevanten Abbildungsbegriffe.

Aufgabe 4.5. Es sei M eine Menge und $a, b \in M$ zwei verschiedene Elemente. Definiere eine Bijektion von M nach M, die a und b vertauscht, und sonst alle Elemente unverändert lässt.

(Eine solche Abbildung heißt *Transposition*).

Aufgabe 4.6. Man gebe Beispiele für Abbildungen

$$\varphi, \psi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$

derart, dass φ injektiv, aber nicht surjektiv ist, und dass ψ surjektiv, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe 4.7. Man beschreibe eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 4.8. Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Verknüpfung

$$g \circ f : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ injektiv ist, so ist f auch injektiv.

Aufgabe 4.9. Seien L, M, N Mengen und

$$f : L \longrightarrow M \text{ und } g : M \longrightarrow N$$

Abbildungen mit der Verknüpfung

$$g \circ f : L \longrightarrow N,\ x \longmapsto g(f(x)).$$

Zeige: Wenn $g \circ f$ surjektiv ist, so ist auch g surjektiv.

Zeige durch Beispiele, dass bei den beiden vorhergehenden Aufgaben die Umkehrung nicht gilt.

Graph einer Abbildung

Aufgabe 4.10. Es seien L und M Mengen und es sei

$$f : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung mit dem Graph $\Gamma_f \subseteq L \times M$. Zeige, dass die Abbildung

$$\psi = \mathrm{id} \times f : L \longrightarrow L \times M,\ x \longmapsto (x, f(x)),$$

eine Bijektion zwischen L und dem Graphen Γ_f induziert. Was ist die Verknüpfung von ψ mit der zweiten Projektion

$$L \times M \longrightarrow M,\ (x, y) \longmapsto y?$$

Aufgabe 4.11. Wie kann man sich den Graph einer Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

und wie sich den Graph einer Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

vorstellen?

Aufgabe 4.12. Skizziere den Graph der reellen Addition

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x + y,$$

und den Graph der reellen Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x \cdot y.$$

Mengenkonstruktionen und Abbildungen

Aufgabe 4.13. Es seien M und N Mengen und

$$\varphi : M \longrightarrow N$$

sei eine Abbildung. Zeige, dass auf M durch die Relation

$$xRy \text{ genau dann, wenn } \varphi(x) = \varphi(y)$$

eine Äquivalenzrelation gegeben wird.

Aufgabe 4.14. Seien M, N, L Mengen. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\operatorname{Abb}(M \times N, L) \text{ und } \operatorname{Abb}(M, \operatorname{Abb}(N, L)) .$$

Man mache sich diese Situation für $M = N = [0, 1]$ und $L = \mathbb{R}$ klar.

Aufgabe 4.15. Seien M, N, L Mengen. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\operatorname{Abb}(M, N \times L) \text{ und } \operatorname{Abb}(M, N) \times \operatorname{Abb}(M, L) .$$

Aufgabe 4.16. Sei M eine Menge. Stifte eine Bijektion zwischen

$$\mathfrak{P}(M) \text{ und } \operatorname{Abb}(M, \{0, 1\}) .$$

Aufgabe 4.17. Sei M eine Menge, die als disjunkte Vereinigung

$$M = A \uplus B$$

gegeben ist. Definiere eine Bijektion zwischen den Potenzmengen,

$$\mathfrak{P}(M) \text{ und } \mathfrak{P}(A) \times \mathfrak{P}(B)\,.$$

Wie verhalten sich diese beiden Mengen, wenn A und B zwar eine Vereinigung von M ergeben, aber nicht disjunkt sind, und umgekehrt.

Aufgabe 4.18. Es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass das Urbildnehmen

$$\mathfrak{P}(M) \longrightarrow \mathfrak{P}(L),\ T \longmapsto F^{-1}(T),$$

folgende Eigenschaften besitzt (für beliebige Teilmengen $T, T_1, T_2 \subseteq M$):

(1) $F^{-1}(T_1 \cap T_2) = F^{-1}(T_1) \cap F^{-1}(T_2)$,
(2) $F^{-1}(T_1 \cup T_2) = F^{-1}(T_1) \cup F^{-1}(T_2)$,
(3) $F^{-1}(M \setminus T) = L \setminus F^{-1}(T)$.

Aufgabe 4.19. Es sei

$$F : L \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass das Bildnehmen

$$\mathfrak{P}(L) \longrightarrow \mathfrak{P}(M),\ S \longmapsto F(S),$$

folgende Eigenschaften besitzt (für beliebige Teilmengen $S, S_1, S_2 \subseteq L$):

(1) $F(S_1 \cap S_2) \subseteq F(S_1) \cap F(S_2)$,
(2) $F(S_1 \cup S_2) = F(S_1) \cup F(S_2)$,
(3) $F(L \setminus S) \supseteq F(M) \setminus F(S)$.

Zeige durch Beispiele, dass die beiden Inklusionen in (1) und (3) echt sein können.

Abbildungen in der Aussagenlogik

Aufgabe 4.20. Interpretiere die Wahrheitstabellen zu den Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ als Wertetabellen von Funktionen. Was sind die Definitions-, die Werte- und die Bildmengen dieser Funktionen?

Aufgabe 4.21. Es sei M eine Menge von Aussagenvariablen und S die damit definierte formale Sprache, also die Menge aller formalen Ausdrücke, die man von M ausgehend mittels der Junktoren $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ und mit Klammern sinnvoll basteln kann. Zeige, dass es zu einer gegebenen Belegungsfunktion

$$\beta : M \longrightarrow \{w, f\},\ p \longmapsto \beta(p),$$

eine eindeutig bestimmte Fortsetzung

$$\tilde{\beta} : S \longrightarrow \{w, f\}$$

gibt, die die Bedeutung (die Wahrheitsfunktion) der Junktoren respektiert.

Aufgabe 4.22. Es sei M eine Menge von Aussagenvariablen und A eine Aussage in der zugehörigen formalen Sprache. Es sei

$$\varphi : M \longrightarrow M$$

eine Abbildung und es sei $\varphi(A)$ diejenige Aussage, die entsteht, wenn man in A jede Aussagenvariable p durch $\varphi(p)$ ersetzt. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Wenn A eine Tautologie ist, so ist auch $\varphi(A)$ eine Tautologie.
(2) Wenn φ injektiv ist, so ist A genau dann eine Tautologie, wenn dies für $\varphi(A)$ gilt.
(3) $\varphi(A)$ kann eine Tautologie sein, auch wenn A keine Tautologie ist.
(4) Die Aussagen gelten ebenso, wenn man überall Tautologie durch Kontradiktion ersetzt.

Abbildungen aus dem Leben

Die folgenden drei Aufgaben sind eher zum Diskutieren als zum Abgeben.

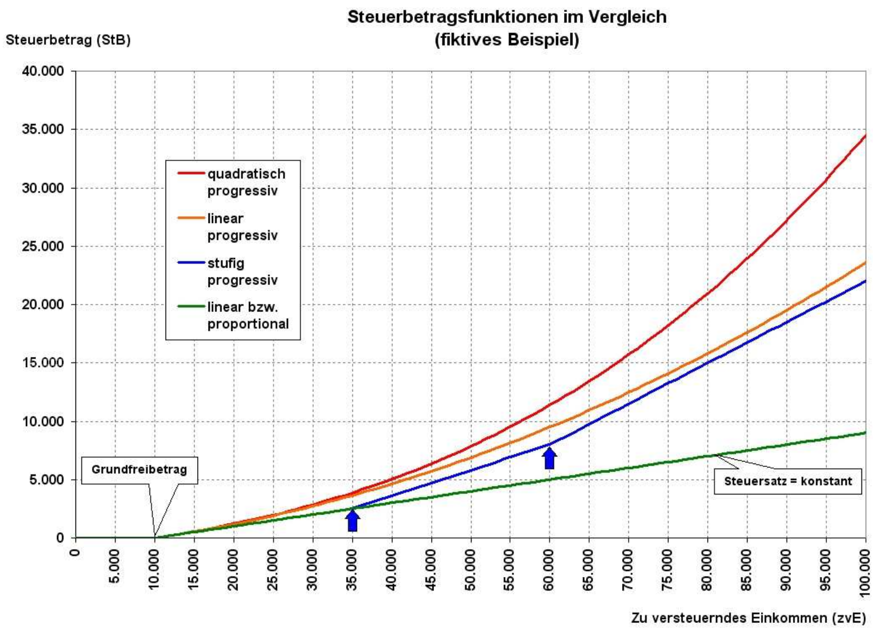
Aufgabe 4.23. Man mache sich klar, in welcher Weise die in Vorlesung 4 angeführten Diagramme Abbildungen darstellen.

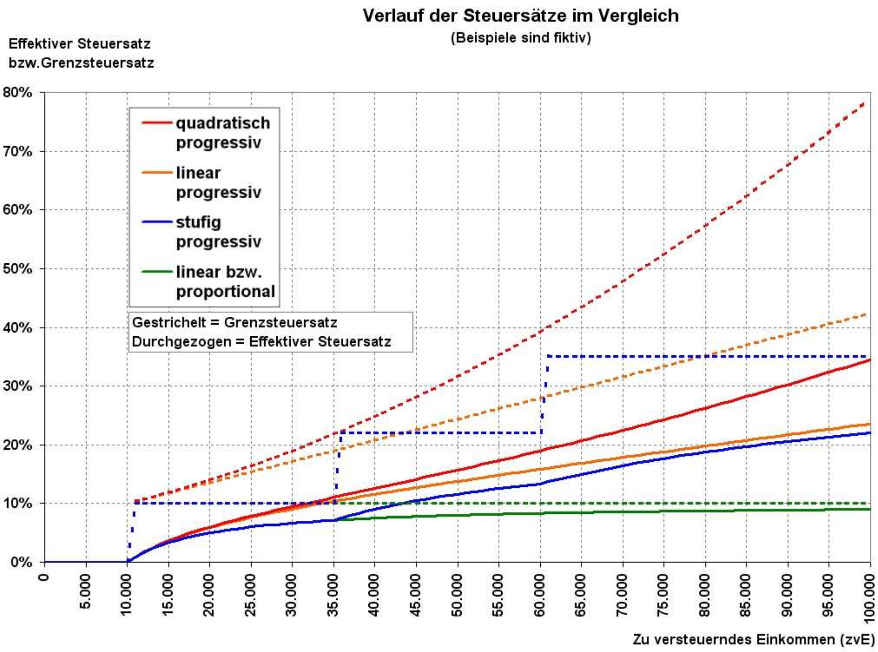
Aufgabe 4.24. Modelliere[1] eine Bundestagswahl mit Hilfe von geeigneten Abbildungen.

[1]Unter einem *Modell* für eine alltägliche oder wissenschaftliche Begebenheit versteht man in der Mathematik eine mathematische Nachbildung, die wesentliche Strukturen der Begebenheit widerspiegelt. Dies spielt insbesondere in der *angewandten Mathematik*, aber auch in der mathematischen Physik, den anderen Naturwissenschaften, der Ökonomie u.s.w. eine große Rolle

Aufgabe 4.25. Studiere die Abbildungen, die in den folgenden Diagrammen beschrieben werden. Ist das Vokabular sinnvoll? Inwiefern sind die Abbildungen politisch, inwiefern mathematisch festgelegt?

Zu versteuerndes Einkommen	Steuerbetrag 2009	Steuersatz 2009	Grenzsteuersatz 2009
8.000,00 €	23,00 €	0,3%	14%
8.500,00 €	97,00 €	1,1%	15%
9.000,00 €	176,00 €	2,0%	16%
9.500,00 €	259,00 €	2,7%	17%
10.000,00 €	347,00 €	3,5%	18%
10.500,00 €	440,00 €	4,2%	19%
11.000,00 €	537,00 €	4,9%	20%
11.500,00 €	639,00 €	5,6%	21%
12.000,00 €	746,00 €	6,2%	22%
13.000,00 €	974,00 €	7,5%	23%
14.000,00 €	1.215,00 €	8,7%	24%
15.000,00 €	1.461,00 €	9,7%	24%
16.000,00 €	1.711,00 €	10,7%	25%
17.000,00 €	1.966,00 €	11,6%	26%
18.000,00 €	2.226,00 €	12,4%	26%
19.000,00 €	2.490,00 €	13,1%	27%
20.000,00 €	2.759,00 €	13,8%	27%
21.000,00 €	3.032,00 €	14,4%	28%
22.000,00 €	3.310,00 €	15,0%	28%
23.000,00 €	3.593,00 €	15,6%	28%
24.000,00 €	3.880,00 €	16,2%	29%
25.000,00 €	4.171,00 €	16,7%	30%
26.000,00 €	4.468,00 €	17,2%	30%
27.000,00 €	4.768,00 €	17,7%	31%
28.000,00 €	5.074,00 €	18,1%	31%
29.000,00 €	5.384,00 €	18,6%	31%
30.000,00 €	5.698,00 €	19,0%	32%
31.000,00 €	6.017,00 €	19,4%	33%
32.000,00 €	6.341,00 €	19,8%	33%
33.000,00 €	6.669,00 €	20,2%	34%
34.000,00 €	7.002,00 €	20,6%	34%
35.000,00 €	7.340,00 €	21,0%	34%
36.000,00 €	7.682,00 €	21,3%	34%
37.000,00 €	8.028,00 €	21,7%	35%
38.000,00 €	8.379,00 €	22,1%	36%
39.000,00 €	8.735,00 €	22,4%	36%
40.000,00 €	9.095,00 €	22,7%	37%
41.000,00 €	9.460,00 €	23,1%	37%
42.000,00 €	9.830,00 €	23,4%	37%
43.000,00 €	10.204,00 €	23,7%	37%
44.000,00 €	10.582,00 €	24,1%	39%
45.000,00 €	10.966,00 €	24,4%	38%
46.000,00 €	11.353,00 €	24,7%	39%
47.000,00 €	11.746,00 €	25,0%	39%
48.000,00 €	12.143,00 €	25,3%	39%
49.000,00 €	12.544,00 €	25,6%	40%
50.000,00 €	12.950,00 €	25,9%	41%
51.000,00 €	13.361,00 €	26,2%	41%
52.000,00 €	13.776,00 €	26,5%	42%
53.000,00 €	14.195,00 €	26,8%	42%
54.000,00 €	14.615,00 €	27,1%	42%
55.000,00 €	15.035,00 €	27,3%	42%


Steuerbetragsfunktionen im Vergleich
(fiktives Beispiel)
Steuerbetrag (StB)
40.000
35.000
30.000
25.000
20.000
15.000
10.000
5.000
0
quadratisch progressiv
linear progressiv
stufig progressiv
linear bzw. proportional
Grundfreibetrag
Steuersatz = konstant
0
5.000
10.000
15.000
20.000
25.000
30.000
35.000
40.000
45.000
50.000
55.000
60.000
65.000
70.000
75.000
80.000
85.000
90.000
95.000
100.000
Zu versteuerndes Einkommen (zvE)


Verlauf der Steuersätze im Vergleich
(Beispiele sind fiktiv)
Effektiver Steuersatz
bzw.Grenzsteuersatz
80%
70%
60%
50%
40%
30%
20%
10%
0%
quadratisch progressiv
linear progressiv
stufig progressiv
linear bzw. proportional
Gestrichelt = Grenzsteuersatz
Durchgezogen = Effektiver Steuersatz
0
5.000
10.000
15.000
20.000
25.000
30.000
35.000
40.000
45.000
50.000
55.000
60.000
65.000
70.000
75.000
80.000
85.000
90.000
95.000
100.000
Zu versteuerndes Einkommen (zvE)

Abbildungsverzeichnis