Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2009/2010**

Mathematik I

Vorlesung 10

Die Vorlesungen der nächsten Wochen beschäftigen sich mit *linearer Algebra*. Ihr zentraler Begriff ist der Vektorraum.

Vektorräume

Wir beginnen mit einem einführenden Beispiel.

An einem Weihnachtsstand auf dem Weihnachtsmarkt gibt es drei verschiedene Glühweintöpfe. Alle drei beinhalten die Zutaten Zimt, Gewürznelken, Rotwein und Zucker, allerdings mit unterschiedlichen Anteilen. Die Zusammensetzung der einzelnen Glühweine ist

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}, \, G_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}, \, G_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Jeder Glühwein wird also repräsentiert durch ein Vierertupel, deren einzelne Einträge für die Anteile an den Zutaten stehen. Die Menge aller (möglichen) Glühweine bilden einen Vektorraum, und die drei konkreten Glühweine sind drei Vektoren in diesem Raum.

Nehmen wir an, dass keiner dieser drei Glühweine genau den Geschmack trifft, der Wunschglühwein hat die Zusammensetzung

$$W = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Gibt es eine Möglichkeit, den Wunschglühwein durch Zusammenschütten der vorgegebenen Glühweine zu erhalten? Gibt es also Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$[1] derart, dass

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 20 \\ 5 \end{pmatrix}$$

gilt. Hinter dieser einen vektoriellen Gleichung liegen vier einzelne Gleichungen in den „Variablen“ a, b, c, wobei die Gleichungen sich aus den Zeilen ergeben. Wann gibt es eine solche Lösung, wann keine, wann mehrere? Das sind typische Fragen der linearen Algebra.

Definition 10.1. Sei K ein Körper und $V = (V, +, 0)$ eine kommutative Gruppe. Man nennt V einen K- *Vektorraum*, wenn eine Abbildung

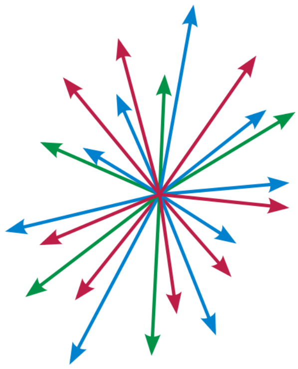
$$K \times V \longrightarrow V,\ (r, v) \longmapsto rv = r \cdot v\,,$$

erklärt ist, die folgende Axiome erfüllt (dabei seien $r, s \in K$ und $u, v \in V$ beliebig)

(1) $r(su) = (rs)u$,
(2) $r(u + v) = ru + rv$,
(3) $(r + s)u = ru + su$,
(4) $1u = u$.

Die Verknüpfung in V nennt man (Vektor)-Addition und die Operation $K \times V \to V$ nennt man *Skalarmultiplikation*. Die Elemente in einem Vektorraum nennt man *Vektoren*, und die Elemente $r \in K$ heißen *Skalare*. Das Nullelement $0 \in V$ wird auch als *Nullvektor* bezeichnet, und zu $v \in V$ heißt das inverse Element das *Negative* zu v und wird mit $-v$ bezeichnet. Den Körper, der im Vektorraumbegriff vorausgesetzt ist, nennt man auch den *Grundkörper*. Alle Begriffe der linearen Algebra beziehen sich auf einen solchen Grundkörper, er darf also nie vergessen werdem, auch wenn er manchmal nicht explizit aufgeführt wird. Bei $K = \mathbb{R}$ spricht man von *reellen Vektorräumen* und bei $K = \mathbb{C}$ von *komplexen Vektorräumen*. Bei reellen und komplexen Vektorräumen gibt es zusätzliche Strukturen wie Längen, Winkel, Skalarprodukt. Zunächst entwickeln wir aber die algebraische Theorie der Vektorräume über einem beliebigen Körper.

[1]Sinnvoll interpretierbar sind in diesem Beispiel nur positive Zahlen, da man schwerlich aus einem Glühweingemisch die einzelnen verwendeten Glühweinsorten wieder herausziehen kann. In der linearen Algebra spielt sich aber alles über einem Körper ab, so dass wir auch negative Zahlen zulassen.



Beispiel 10.2. Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Produktmenge

$$K^n = \underbrace{K \times \cdots \times K}_{n-\text{mal}} = \{(x_1, \ldots, x_n) | \, x_i \in K\}$$

mit der komponentenweisen Addition und der durch

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

definierten Skalarmultiplikation ein Vektorraum. Insbesondere ist $K^1 = K$ selbst ein Vektorraum.

Der Nullraum 0, der aus dem einzigen Element 0 besteht, ist ebenfalls ein Vektorraum. Man kann ihn auch als $K^0 = 0$ auffassen.

Beispiel 10.3. Der *Anschauungsraum* (oder die Ebene), wie man ihn sich elementargeometrisch vorstellt, ist kein Vektorraum! Weder gibt es in ihm eine natürliche 0 noch kann man zwei Punkte darin miteinander addieren oder einen Punkt mit einer Zahl multiplizieren. Dies sieht anders aus, wenn man nicht den Anschauungsraum betrachtet, sondern alle möglichen *Parallelverschiebungen* im Anschauungsraum. Eine solche elementar-geometrische Verschiebung verschiebt jeden Punkt in eine bestimmte, für alle Punkte gleiche Richtung. Eine solche Verschiebungsrichtung kann man sich als einen Pfeil vorstellen. Die Menge der Parallelverschiebungen kann man in natürlicher Weise zu einem Vektorraum über $\mathbb{R}$ machen. Der Nullvektor ist dann die Nullverschiebung, die also nichts verschiebt, sondern jeden Punkt an seinem Ort lässt. Die Addition von Verschiebungen ist die Hintereinanderausführung der Verschiebungen. Sie wird beschrieben, indem man das Ende des einen Verschiebungspfeils an die Spitze des anderen Verschiebungspfeils anlegt und den Gesamtpfeil betrachtet. Diese Verknüpfung ist kommutativ (Parallelogramm). Die Multiplikation mit einer positiven Zahl ist dann die Streckung oder Stauchung der Verschiebung um den als Skalar gegebenen Faktor, die Multiplikation mit einer negativen Zahl ist dann die Streckung oder Stauchung in die andere Richtung. Insbesondere ist das Negative einer Verschiebung die *entgegengesetzte Verschiebung*.

Wenn man allerdings im Anschauungsraum einen Punkt als *Ursprungspunkt* (oder *Nullpunkt*) auszeichnet, so kann man jeden Punkt mit dem Verbindungspfeil vom Ursprung zu diesem Punkt identifizieren und erhält dann eine Vektorraumstruktur auf dem Anschauungsraum.

Beispiel 10.4. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden einen Körper und daher bilden sie einen Vektorraum über sich selbst. Andererseits sind die komplexen Zahlen als additive Gruppe gleich $\mathbb{R}^2$. Die Multiplikation einer komplexen Zahl $a + bi$ mit einer reellen Zahl $\lambda = (\lambda, 0)$ geschieht komponentenweise, d.h. diese Multiplikation stimmt mit der skalaren Multiplikation auf $\mathbb{R}^2$ überein. Daher sind die komplexen Zahlen auch ein reeller Vektorraum. Unter Verwendung einer späteren Terminologie kann man sagen, dass $\mathbb{C}$ ein eindimensionaler komplexer Vektorraum ist und dass $\mathbb{C}$ ein zweidimensionaler reeller Vektorraum ist mit der reellen Basis 1 und i.

Beispiel 10.5. Es sei K ein Körper. Wir betrachten die Menge der Folgen in K, also

$$V = \{x | \, x : \mathbb{N} \to K \text{ Abbildung}\} .$$

Dise ist mit komponentenweiser Addition, bei der also die Summe von zwei Folgen x und y durch

$$(x + y)_n := x_n + y_n$$

erklärt wird, und mit der durch

$$(\lambda x)_n := \lambda x_n$$

definierten Skalarmultiplikation ein Vektorraum.

Beispiel 10.6. Wir betrachten die Inklusion $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ der rationalen Zahlen in den reellen Zahlen. Mit der reellen Addition und mit der Multiplikation von rationalen Zahlen mit reellen Zahlen ist $\mathbb{R}$ ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum, wie direkt aus den Körperaxiomen folgt. Dies ist ein ziemlich unübersichtlicher Vektorraum.

Vor dem nächsten Beispiel führen wir Polynome über einem Körper ein.

Definition 10.7. Es sei K ein Körper. Ein Ausdruck der Form

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$$

mit $a_i \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ heißt *Polynom in einer Variablen* über K.

Ein Polynom P definiert eine *Polynomfunktion*

$$K \longrightarrow K, \, x \longmapsto P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i .$$

Der Wert dieser Funktion an der Stelle x ergibt sich also dadurch, dass man die Variable X überall durch das Körperelement x ersetzt. Achtung! Bei endlichen Körpern können verschiedene Polynome die gleiche Polynomfunktion definieren, so dass man zwischen Polynom und Polynomfunktion unterscheiden muss.

Beispiel 10.8. Sei $R = K[X]$ die Menge aller Polynome in einer Variablen über dem Körper K. Man definiert eine Addition auf R, indem man zu zwei Polynomen

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ und } Q = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$$

folgendermaßen vorgeht. Es sei $n = \max(n, m)$. Man kann dann Q als eine Summe schreiben, die bis n läuft, indem man die dazu benötigten Koeffizienten b_i, $i > m$, gleich null setzt. Damit definiert man die Summe komponentenweise, also

$$P + Q = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i.$$

Desweiteren kann man ein Polynom $P = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ mit einem Skalar $\lambda \in K$ multiplizieren, indem man

$$\lambda P := \sum_{i=0}^{n} (\lambda a_i) X^i$$

setzt. Man kann einfach nachprüfen, dass mit diesen Operationen ein Vektorraum vorliegt.

Lemma 10.9. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gelten die folgenden Eigenschaften (dabei sei $v \in V$ und $\lambda \in K$) .*

1. *Es ist* $0v = 0$. [2]
2. *Es ist* $\lambda 0 = 0$.
3. *Es ist* $(-1)v = -v$.
4. *Aus* $\lambda \neq 0$ *und* $v \neq 0$ *folgt* $\lambda v \neq 0$.

Beweis. Siehe Aufgabe 10.9. □

Erzeugendensysteme und Untervektorräume

Definition 10.10. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Dann heißt der Vektor

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n \text{ mit } a_i \in K$$

eine *Linearkombination* dieser Vektoren (zum *Koeffiziententupel* $(a_1, \ldots, a_n)$).

Zwei unterschiedliche Koeffiziententupel können denselben Vektor definieren.

[2] Man mache sich hier und im Folgenden klar, wann die 0 in K und wann sie in V zu verstehen ist.

Definition 10.11. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann heißt eine Familie $v_i \in V$, $i \in I$, ein *Erzeugendensystem* von V, wenn man jeden Vektor $v \in V$ darstellen kann als

$$v = \sum_{j \in J} \lambda_j v_j$$

mit einer endlichen Teilfamilie $J \subseteq I$ und mit $\lambda_j \in K$.

Definition 10.12. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ heißt *Untervektorraum*, wenn gilt

(1) $0 \in U$.
(2) Mit $u, v \in U$ ist auch $u + v \in U$.
(3) Mit $u \in U$ und $\lambda \in K$ ist auch $\lambda u \in U$.

Auf einem solchen Untervektorraum kann man die Addition und die skalare Multiplikation einschränken. Daher ist ein Untervektorraum selbst ein Vektorraum, siehe Aufgabe 10.. Die einfachsten Untervektorräume in einem Vektorraum V sind der Nullraum 0 und der gesamte Vektorraum V.

Definition 10.13. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zu einer Familie v_i, $i \in I$, setzt man

$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = \{ \sum_{i \in J} c_i v_i |\, c_i \in K,\ J \subseteq I \text{ endliche Teilmenge} \}$$

und nennt dies den von der Familie *erzeugten* oder *aufgespannten* Untervektorraum.

Der von der leeren Menge erzeugte Unterraum ist der Nullraum.[3] Dieser wird ebenso von der 0 erzeugt. Zu einem einzigen Vektor v besteht der aufgespannte Raum aus $Kv = \{\lambda v |\, \lambda \in K\}$. Bei $v \neq 0$ ist dies eine *Gerade*, was wir im Rahmen der Dimensionstheorie noch präzisieren werden. Bei zwei Vektoren v und w hängt die „Gestalt“ des aufgespannten Raumes davon ab, wie die beiden Vektoren sich zueinander verhalten. Wenn sie beide auf einer Geraden liegen, d.h. wenn gilt $w = \lambda v$, so ist w überflüssig und der von den beiden Vektoren erzeugte Unterraum stimmt mit dem von v erzeugten Unterraum überein. Wenn dies nicht der Fall ist (und v und w nicht 0 sind), so erzeugen die beiden Vektoren eine „Ebene“.

Wir fassen einige einfache Eigenschaften für Erzeugendensysteme und Unterräume zusammen.

Lemma 10.14. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gelten folgende Aussagen.*

[3]Dies kann man als Definition nehmen oder aber aus Definition 10.13 ableiten, wenn man die Konvention berücksichtigt, dass die leere Summe gleich 0 ist.

(1) *Sei U_j, $j \in J$, eine Familie von Untervektorräumen. Dann ist auch der Durchschnitt*

$$U = \bigcap_{j \in J} U_j$$

ein Untervektorraum.

(2) *Zu einer Familie v_i, $i \in I$, von Elementen in V ist der erzeugte Unterraum ein Unterraum. Er stimmt mit dem Durchschnitt*

$$\bigcap_{U \subseteq V \text{ Untervektorraum}, v_i \in U \text{ für alle } i \in I} U$$

überein.

(3) *Die Familie v_i, $i \in I$, ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn*

$$\langle v_i,\, i \in I \rangle = V$$

ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 10.5. □

Beispiel 10.15. Es sei K ein angeordneter Körper und sei

$$V = \{x \mid x : \mathbb{N} \to K \text{ Abbildung}\}$$

die Menge der Folgen in K (siehe Beispiel 10.5). Dann sind die beiden Teilmengen

$$U = \{x \in V \mid x \text{ konvergiert in } K\}$$

und

$$C = \{x \in V \mid x \text{ ist Cauchy-Folge}\}$$

Untervektorräume von V mit $U \subseteq C$. Die erste Aussage folgt aus Beispiel 10.5 (1),(3), für die zweite Aussage siehe Lemma 7.10.

Lineare Gleichungssysteme und Elimination

Definition 10.16. Es sei K ein Körper und $a_1, \ldots, a_n \in K$. Dann nennt man

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

eine *lineare Gleichung* in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$ zu den Koeffizienten a_j, $j = 1, \ldots, n$. Ein Tupel $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K^n$ heißt *Lösung der linearen Gleichung*, wenn $\sum_{j=1}^n a_j \xi_j = 0$ ist.

Wenn $c \in K$ ein weiteres Element ist, so heißt

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = c$$

eine *inhomogene lineare Gleichung* und ein Tupel $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in K^n$ heißt *Lösung der inhomogenen linearen Gleichung*, wenn $\sum_{j=1}^n a_j \zeta_j = c$ ist.

Definition 10.17. Es sei K ein Körper und $a_{ij} \in K$ für $1 \leq i \leq m$ und $1 \leq j \leq n$. Dann nennt man

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein *lineares Gleichungungssystem* in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Ein Tupel $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in K^n$ heißt *Lösung des linearen Gleichungssystems*, wenn $\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j = 0$ ist für alle $i = 1, \ldots, m$.

Wenn $(c_1, \ldots, c_m) \in K^n$ beliebig[4] ist, so heißt

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

ein *inhomogenes lineares Gleichungssystem* und ein Tupel $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in K^n$ heißt *Lösung der inhomogenen linearen Gleichung*, wenn $\sum_{j=1}^n a_{ij}\zeta_j = c_i$ ist für alle i.

Ein lineares Gleichungssystem besitzt immer die sogenannte *triviale Lösung* $0 = (0, \ldots, 0)$. Ein inhomogenes Gleichungssystem braucht nicht unbedingt eine Lösung haben. Solche Gleichungssysteme treten immer wieder auf.

Beispiel 10.18. Es sei K ein Körper und $m \in \mathbb{N}$. Im K^m seien n Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, v_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

gegeben und sei

$$w = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_m \end{pmatrix}$$

ein weiterer Vektor. Wir wollen wissen, wann w sich als Linearkombination der v_j darstellen lässt. Es geht also um die Frage, ob es m Elemente

[4]Ein solcher Vektor heißt manchmal ein *Störvektor* des Systems.

$\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ gibt mit der Eigenschaft

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_m \end{pmatrix} .$$

Die Gleichheit von Vektoren bedeutet, dass Übereinstimmung in jeder Komponenten vorliegen muss, so dass dies zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1n}\lambda_n & = & c_1 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \ldots + a_{2n}\lambda_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\lambda_1 + a_{m2}\lambda_2 + \ldots + a_{mn}\lambda_n & = & c_m \end{array}$$

führt.

Lemma 10.19. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{array}$$

ein lineares Gleichungssystem über K. Dann ist die Menge aller Lösungen des Gleichungssystems ein Untervektorraum des K^n (mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation).

Beweis. Siehe Aufgabe 10.7. □

Man spricht daher auch vom *Lösungsraum* des Gleichungssystems. Insbesondere addiert man zwei lineare Gleichungen, indem man die zu einer Variablen gehörenden Koeffizienten jeweils miteinander addiert. Die Lösungsmenge eines inhomogenen Gleichungssystems ist kein Vektorraum. Dennoch gibt es auch dafür eine sinnvolle Addition, wobei man wieder die Koeffizienten zu den Variablen, aber auch die inhomogenen Koeffizienten miteinander addieren muss.

Definition 10.20. Es sei K ein Körper und seien zwei (inhomogene) lineare Gleichungssysteme zur gleichen Variablenmenge gegeben. Die Systeme heißen *äquivalent*, wenn ihre Lösungsräume übereinstimmen.

Die Äquivalenz von linearen Gleichungssystemen ist eine Äquivalenzrelation. Eine naheliegende Aufgabe ist es, zu einem linearen Gleichungssystem ein möglichst einfaches äquivalentes Gleichungssystem zu finden, und dieses dann zu „lösen“.

LEMMA 10.21. *Es sei K ein Körper und*

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = & c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = & c_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = & c_m \end{array}$$

ein inhomogenes lineares Gleichungssystem. Dann führen die folgenden Manipulationen an diesem Gleichungssystem zu einem äquivalenten Gleichungssystem.

(1) *Das Vertauschen von zwei Gleichungen.*
(2) *Die Multiplikation einer Gleichung mit einen Skalar $\lambda \neq 0$.*
(3) *Das einfache Weglassen einer Gleichung, die doppelt vorkommt.*
(4) *Das verdoppeln einer Gleichung (im Sinne von eine Gleichung zweimal hinschreiben).*
(5) *Das Weglassen oder Hinzufügen von einer Nullzeile.*
(6) *Das Ersetzen einer Gleichung H durch diejenige Gleichung, die entsteht, wenn man zu H eine andere Gleichung G des Systems addiert.*

Beweis. Die meisten Aussagen sind direkt klar. (2) ergibt sich einfach daraus, dass wenn

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = c$$

gilt, dass dann auch

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i) x_i = \lambda c$$

gilt für jedes $\lambda \in K$. Bei $\lambda \neq 0$ kann man diesen Übergang durch Multiplikation mit λ^{-1} rückgängig machen.

(6). Es sei G die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = c$$

und H die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = d \,.$$

Wenn ein Tupel $(\xi, \ldots, \xi_n)$ die beiden Gleichungen erfüllt, so erfüllt es auch die Gleichung $H' = G + H$. Und wenn das Tupel die beiden Gleichungen G und H' erfüllt, so auch die Gleichung G und $H = H' - G$. □

LEMMA 10.22. *Es sei K ein Körper und S ein (inhomogenes) lineares Gleichungssystem über K in einer Menge von Variablen. Es sei x eine Variable,* *die in mindestens einer Gleichung G mit einem von null verschiedenen Koeffizienten a vorkommt. Dann lässt sich jede von G verschiedene*[5] *Gleichung H durch eine Gleichung H' ersetzen, in der x nicht mehr vorkommt, und zwar so, dass das neue Gleichungssystem S', das aus G und den Gleichungen H' besteht, äquivalent zum Ausgangssystem S ist.*

Beweis. Es sei G die Gleichung

$$ax + \sum_{i \in I} a_i x_i = b$$

(mit $a \neq 0$) und H die Gleichung

$$cx + \sum_{i \in I} c_i x_i = d\,.$$

Dann hat die Gleichung $H' = H - \frac{c}{a} G$ die Gestalt

$$\sum_{i \in I} (c_i - \frac{c}{a} a_i) x_i = d - \frac{c}{a} b\,,$$

in der x nicht mehr vorkommt. Wegen $H = H' + \frac{c}{a} G$ gilt, dass die Gleichungssysteme äquivalent sind. □

Das folgende Verfahren heißt Gausssches Eliminationsverfahren.

Verfahren 10.23. Gegeben sei ein (inhomogenes) lineares Gleichungssystem S über einem Körper K. Dann wendet man auf eine geeignete Variable x Lemma 10.22 an und erhält ein äquivalentes Gleichungssystem bestehend aus einer linearen Gleichung G_1, in der x vorkommt, und einer Menge R_1 von Gleichungen, in denen x nicht vorkommt. Das System $S_1 = \{G_1\} \cup R_1$ ist äquivalent zu S. Man wendet nun dieses Verfahren auf R_1 an (falls R_1 zwei von null verschiedene Gleichungen besitzt) und eliminiert dort eine weitere Variable, etc. So erhält man nach und nach Gleichungssysteme R_i mit immer weniger Variablen und der Eigenschaft, dass $S_i = \{G_1, \ldots, G_i\} \cup R_i$ äquivalent zu S ist. Man ist fertig, wenn man nicht mehr eliminieren kann, und dies ist genau dann der Fall, wenn in R_i nur noch eine von null verschiedene Gleichung steht.

Insgesamt erhält man so ein äquivalentes Gleichungssystem in „Stufenform“, das man einfach lösen kann.

[5]Mit verschieden ist hier gemeint, dass die beiden Gleichungen einen unterschiedlichen Index im System haben. Es ist also sogar der Fall erlaubt, dass G und H dieselbe, aber doppelt aufgeführte Gleichung ist.

Abbildungsverzeichnis