

Mathematik für Anwender II

Vorlesung 54

Gradientenfelder

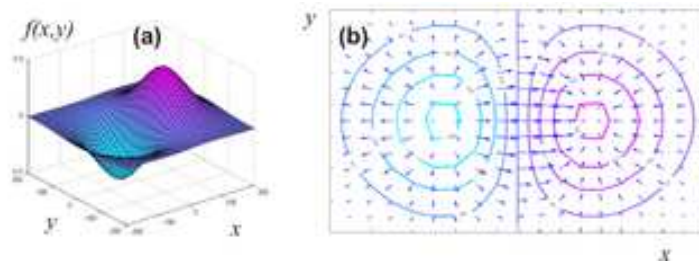
DEFINITION 54.1. Sei V ein euklidischer Vektorraum, $U \subseteq V$ offen und

$$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion. Dann nennt man die Abbildung

$$U \longrightarrow V, P \longmapsto \text{grad } h(P),$$

das zugehörige *Gradientenfeld*.



Ein Gradientenfeld ist also ein zeitunabhängiges Vektorfeld. Man spricht auch von einem *Potentialfeld*, die Funktion h (manchmal $-h$) heißt dann ein Potential des Vektorfeldes. Wenn h zweimal stetig differenzierbar ist, so genügt nach Lemma 53.3 das zugehörige Gradientenfeld lokal einer Lipschitz-Bedingung.

Die folgende Aussage zeigt, dass die Lösungskurven der zugehörigen Differentialgleichung $v' = \text{grad } h(v)$ senkrecht auf den Fasern von h liegen. Die Fasern beschreiben, wo das Potential (oder die Höhenfunktion) konstant ist, die Lösungen beschreiben den Weg des steilsten Abstiegs. Wenn h beispielsweise die Höhenfunktion eines Gebirges ist, so gibt das Gradientenfeld in jedem Punkt den steilsten Anstieg an und die Trajektorie einer Lösungskurve beschreibt den Verlauf eines Baches (wir behaupten nicht, dass die Bewegung eines Wassermoleküls im Bach durch diese Differentialgleichung bestimmt ist, sondern lediglich, dass der zurückgelegte Weg, also das Bild der Kurve, mit dem Bild der Lösungskurve übereinstimmt). Der Bach verläuft immer senkrecht zu den Höhenlinien.

LEMMA 54.2. Sei V ein euklidischer Vektorraum, $U \subseteq V$ offen,

$$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion und

$$U \longrightarrow V, P \longmapsto G(P) = \text{grad } h(P),$$

das zugehörige Gradientenfeld. Es sei

$$\varphi: J \longrightarrow U$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$v' = G(v).$$

Dann steht $\varphi'(t)$ senkrecht auf dem Tangentialraum $T_{\varphi(t)}F$ der Faser F von h durch $\varphi(t)$ für alle $t \in J$, für die $\varphi(t)$ reguläre Punkte von h sind.

Beweis. Sei $P = \varphi(t)$ ein regulärer Punkt von h und sei $v \in T_P F$ ein Vektor aus dem Tangentialraum. Dann gilt direkt

$$\langle v, \varphi'(t) \rangle = \langle v, G(\varphi(t)) \rangle = \langle v, \text{grad } h(P) \rangle = (Dh)_P(v) = 0.$$

□

BEISPIEL 54.3. Wir betrachten die *Produktabbildung*

$$h: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy.$$

Das zugehörige Gradientenfeld ist

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto G(x, y) = (y, x).$$

Die Fasern von h sind das Achsenkreuz (die Faser über 0) und die durch $xy = c$, $c \neq 0$, gegebenen Hyperbeln. Die Lösungen der Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

sind von der Form

$$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = (a \cosh t + b \sinh t, a \sinh t + b \cosh t)$$

mit beliebigen $a, b \in \mathbb{R}$, wie man direkt nachrechnet. Dabei ist $\varphi(0) = (a, b)$. Für $a = b = 0$ ist dies die stationäre Lösung im Nullpunkt, in dem die Produktabbildung nicht regulär ist. Bei $a = b = 1$ ist $\varphi(t) = (e^t, e^t)$, das Bild dieser Lösung ist die obere Halbdigonale (ohne den Nullpunkt), bei $a = b = -1$ ist $\varphi(t) = (-e^t, -e^t)$, das Bild dieser Lösung ist die untere Halbdigonale, bei $a = 1$ und $b = -1$ ist $\varphi(t) = (e^{-t}, -e^{-t})$, das Bild dieser Lösung ist die untere Hälfte der Nebendiagonalen, bei $a = -1$ und $b = 1$ ist $\varphi(t) = (-e^{-t}, e^{-t})$, das Bild dieser Lösung ist die obere Hälfte der Nebendiagonalen.

Ansonsten treffen die Lösungskurven das Achsenkreuz in einem Punkt $\neq (0, 0)$. Wenn man diesen Punkt als Anfangswert zum Zeitpunkt $t = 0$ nimmt, so kann man die Lösungskurven als

$$(a \cosh t, a \sinh t)$$

(zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Lösung auf der x -Achse im Punkt $(a, 0)$), und als

$$(b \sinh t, b \cosh t)$$

(zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich die Lösung auf der y -Achse im Punkt $(0, b)$) realisieren. Die Bahnen dieser Lösungen erfüllen die Gleichung $x^2(t) - y^2(t) = a^2$ bzw. $x^2(t) - y^2(t) = b^2$, d.h. sie sind selbst Hyperbeln.

Wegintegrale und Gradientenfelder

LEMMA 54.4. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und*

$$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion mit dem zugehörigen Gradientenfeld $G = \text{grad } h$. Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein stetig differenzierbarer Weg in U . Dann gilt für das Wegintegral

$$\int_{\gamma} G = h(\gamma(b)) - h(\gamma(a)).$$

*D.h. das Wegintegral hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab.*¹

Beweis. Aufgrund der Kettenregel ist

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} G &= \int_a^b \langle G(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n G_i(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt \\ &= \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma'_i(t) dt \\ &= \int_a^b (h \circ \gamma)'(t) dt \\ &= h(\gamma(b)) - h(\gamma(a)). \end{aligned}$$

□

¹In einem Potentialfeld ist also die geleistete Arbeit gleich der Potentialdifferenz von Start- und Endpunkt.

KOROLLAR 54.5. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und

$$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine differenzierbare Funktion mit dem zugehörigen Gradientenfeld $G = \text{grad } h$. Es sei $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ ein stetig differenzierbarer Weg mit $\gamma(a) = \gamma(b)$. Dann ist

$$\int_{\gamma} G = 0.$$

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 54.4. □

SATZ 54.6. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene zusammenhängende Teilmenge² und

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.

- (1) G ist ein Gradientenfeld.
- (2) Für jeden stetig differenzierbaren Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ hängt das Wegintegral $\int_{\gamma} G$ nur vom Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$ ab.

Beweis. Die Implikation (1) \Rightarrow (2) folgt aus Lemma 54.4. Sei umgekehrt die Eigenschaft (2) erfüllt. Wir geben eine auf U definierte Funktion h an, die differenzierbar ist und deren Gradientenfeld gleich dem vorgegebenen Vektorfeld ist. Dazu sei ein Punkt $P \in U$ fixiert. Für jeden Punkt $Q \in U$ gibt es einen stetig differenzierbaren Weg³

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow U$$

mit $\gamma(a) = P$ und $\gamma(b) = Q$. Wir setzen

$$h(Q) := \int_{\gamma} G.$$

Aufgrund der vorausgesetzten Wegunabhängigkeit des Integrals ist $h(Q)$ wohldefiniert. Wir müssen zeigen, dass diese so definierte Funktion in jedem Punkt $Q \in U$ und in jede Richtung $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist und die Richtungsableitung mit $\langle G(Q), v \rangle$ übereinstimmt. Dazu betrachten wir

$$h(Q + tv) - h(Q) = \int_{\delta} G = \int_0^t \sum_{i=1}^n G_i(Q + sv) \cdot v_i ds,$$

²Eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt (Weg-)zusammenhängend, wenn man je zwei Punkte $P, Q \in U$ durch einen stetigen Weg miteinander verbinden kann.

³Aus der Existenz eines verbindenden stetigen Weges folgt die Existenz eines verbindenden stetig differenzierbaren Weges. Man könnte also auch diese Eigenschaft als Definition für zusammenhängend nehmen.

wobei δ der verbindende lineare Weg von Q nach $Q+tv$ sei (und t hinreichend klein sei, sodass $Q+tv \in U$ ist). Für den Differentialquotienten ist

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(Q+tv) - h(Q)}{t} &= \sum_{i=1}^n \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t G_i(Q+sv) \cdot v_i ds \\ &= \sum_{i=1}^n G_i(Q) \cdot v_i \\ &= \langle G(Q), v \rangle. \end{aligned}$$

□

Die Integrabilitätsbedingung

Wie kann man erkennen, ob ein gegebenes Vektorfeld ein Gradientenfeld ist? Eine notwendige Bedingung schlägt sich in der folgenden Definition nieder.

DEFINITION 54.7. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein differenzierbares Vektorfeld. Man sagt, dass G die *Integrabilitätsbedingung* erfüllt (oder *lokal integrabel* ist), wenn

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j}(P) = \frac{\partial G_j}{\partial x_i}(P)$$

für alle $P \in U$ und alle i, j gilt.

LEMMA 54.8. Das Gradientenfeld einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion erfüllt die Integrabilitätsbedingung.

Beweis. Dies folgt direkt aus Satz 45.11. □

BEISPIEL 54.9. Das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (-y, x),$$

erfüllt wegen

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = -1 \neq 1 = \frac{\partial G_2}{\partial x}$$

nicht die Integrabilitätsbedingung. Es kann also nach Lemma 54.8 kein Gradientenfeld sein.

DEFINITION 54.10. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig* bezüglich eines Punktes $P \in T$, wenn für jeden Punkt $Q \in T$ die Verbindungsstrecke $sQ + (1-s)P$, $s \in [0, 1]$, ganz in T liegt.

SATZ 54.11. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine sternförmige offene Teilmenge und

$$G: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann sind die folgenden Eigenschaften äquivalent.

- (1) G ist ein Gradientenfeld.
- (2) G erfüllt die Integrabilitätsbedingung.
- (3) Für jeden stetig differenzierbaren Weg $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ hängt das Wegintegral $\int_{\gamma} G$ nur vom Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$ ab.

Beweis. Die Äquivalenz (1) \iff (3) folgt aus Satz 54.6 und die Implikation (1) \implies (2) aus Lemma 54.8. Es bleibt also (2) \implies (1) zu zeigen, wobei wir explizit eine Stammfunktion h zum Vektorfeld G angeben. Es sei $P \in U$ ein Punkt derart, dass U bezüglich P sternförmig ist. Wir definieren $h(Q)$ über das Wegintegral zu G zum linearen Verbindungsweg

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow U, t \mapsto P + t(Q - P),$$

also

$$h(Q) = \int_{\gamma} G = \int_0^1 \langle G(\gamma(t)), Q - P \rangle dt.$$

Wir müssen zeigen, dass der Gradient zu h gleich G ist, d.h. es ist $\frac{\partial h}{\partial x_i} = G_i$ zu zeigen. Dafür können wir $P = 0$ annehmen und wir schreiben v statt Q . Mit diesen Bezeichnungen und Voraussetzungen ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} h(v) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_0^1 \langle G(tv), v \rangle dt \right) \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \langle G(tv), v \rangle \right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n G_j(tv) \cdot v_j \right) \right) dt \\ &= \int_0^1 t \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_i} G_j(tv) + G_i(tv) dt \\ &= \int_0^1 t \sum_{j=1}^n v_j \frac{\partial}{\partial x_j} G_i(tv) + G_i(tv) dt \\ &= \int_0^1 (t \mapsto t \cdot G_i(tv))' dt \\ &= G_i(v). \end{aligned}$$

Dabei beruht die zweite Gleichung auf der Vertauschbarkeit von Integration und Differentiation (das haben wir nicht bewiesen), die vierte Gleichung auf Aufgabe 54.9, die fünfte Gleichung auf der Integrabilitätsbedingung und die sechste Gleichung auf der Kettenregel. \square

BEISPIEL 54.12. Wir betrachten das Vektorfeld

$$G: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x).$$

Wegen

$$\frac{\partial G_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-(x^2 + y^2) + y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

und

$$\frac{\partial G_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{(x^2 + y^2) - x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

erfüllt dieses Vektorfeld die Integrabilitätsbedingung. Es handelt sich aber nicht um ein Gradientenfeld, da das Wegintegral zum Einheitskreis nicht 0 ist im Gegensatz zu Korollar 54.5.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Gradient field.png , Autor = Benutzer Christophe.Finot auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0

1