Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 28

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 28.1. Es sei $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$. Wir betrachten die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{a} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(a) \longrightarrow 0\,.$$

Zeige, dass dies zu einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/(a), \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z} \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z} \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \longrightarrow E \cong \mathbb{Z}/(a) \longrightarrow 0$$

führt.

Aufgabe 28.2. Es sei

$$\varphi\colon\, \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^m$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus und

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^m \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

die zugehörige kurze exakte Sequenz. Zeige, dass dies zu einer exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(D, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}^m \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^m, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}^n \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z})$$

führt, wobei die Abbildung rechts nicht surjektiv sein muss.

Die nächste Aufgabe beruht auf dem Elementarteilersatz.

Aufgabe 28.3. Es sei

$$\varphi\colon\, \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus und

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}^n \longrightarrow D \longrightarrow 0$$

die zugehörige kurze exakte Sequenz, wobei D endlich ist. Zeige, dass dies zu einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(D, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}^n \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}^n \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}) \longrightarrow E \longrightarrow 0$$

führt, wobei E isomorph zu D ist.

Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Der R-Modul

$$M^* = \operatorname{Hom}(M, R)$$

heißt der *duale Modul* zu M.

Aufgabe 28.4. Es sei R ein kommutativer Ring und sei

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln L, M, N. Zeige, dass dies zu einer exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow N^* \longrightarrow M^* \longrightarrow L^*$$

der dualen Moduln führt.

Ein R-Modul M über einem Integritätsbereich heißt *Torsionsmodul*, wenn es zu jedem $v \in M$ ein $r \in R$, $r \neq 0$, mit $rv = 0$ gibt.

Aufgabe 28.5. Sei R ein Integritätsbereich und sei M ein R-Torsionsmodul. Zeige, dass der duale Modul $M^* = 0$ ist.

Aufgabe 28.6. Es sei M ein endlich erzeugtes Monoid und

$$\gamma\colon M \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ein Monoidhomomorphismus mit der zugehörigen Spektrumsabbildung

$$\mathbb{C}^\times \cong \left(\operatorname{Spek}\left(\mathbb{C}[T, T^{-1}]\right)\right)_{\mathbb{C}} \longrightarrow (\operatorname{Spek}(\mathbb{C}[M]))_{\mathbb{C}}$$

und dem induzierten stetigen geschlossenen Weg

$$S^1 \longrightarrow (\operatorname{Spek}(\mathbb{C}[M]))_{\mathbb{C}}.$$

Zeige, dass dieser Weg nullhomotop ist, wenn der Monoidhomomorphismus γ durch $\mathbb{N}$ faktorisiert.

Aufgabe 28.7. Es sei M das punktierte Spektrum zu $R = \mathbb{C}[U, V, Z]/(U^2 + V^2 - Z^2)$. Man gebe einen expliziten Erzeuger der Fundamentalgruppe von M an.

Aufgabe 28.8. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} \xi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \xi_n \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix, deren Einträge allesamt Einheitswurzeln ξ_j in einem Körper K seien. Zeige, dass die zugehörige lineare Operation der von A erzeugten zyklischen Gruppe auf dem $K^n \setminus \{0\}$ genau dann fixpunktfrei ist, wenn die Ordnungen der ξ_j übereinstimmen.

Aufgabe 28.9. Wir betrachten die lineare Operation der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/(5)$ auf $\mathbb{C}^3$ durch Potenzen der Matrix

$$\begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi^3 \end{pmatrix},$$

wobei ξ eine fünfte primitive Einheitswurzel sei. Bestimme den Invariantenring zu dieser Operation. Man gebe einen expliziten Erzeuger der lokalen Fundamentalgruppe des Spektrums dieses Invariantenringes an.

Aufgabe 28.10. Wir betrachten die lineare Operation der symmetrischen Gruppe S_2 auf dem $\mathbb{C}^2$ und es sei

$$\mathbb{C}^2 \setminus T \longrightarrow \left(\mathbb{C}^2 \backslash S_2\right) \setminus q(T)$$

die zugehörige Quotientenabbildung, wobei T der Fixraum der Operation sei. Beschreibe die induzierte Abbildung der Fundamentalgruppen.

Aufgabe 28.11. Es sei $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ eine nichttriviale Reflektionsgruppe. Zeige, dass zu einer fixpunktfreien, offenen G-invarianten Teilmenge $U \subseteq K^n$ das Komplement $K^n \setminus U$ eine Dimension $\geq n-1$ besitzt.

Eine endliche Untergruppe $G \subseteq \mathrm{GL}_n(K)$ über einem Körper K heißt *klein*, wenn sie keine Pseudoreflektion enthält.

Aufgabe 28.12. Es sei $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ eine kleine Gruppe. Zeige, dass es eine offene Menge $U \subseteq \left(\operatorname{Spek}\left(K[X_1, \ldots, X_n]^G\right)\right)_{\mathbb{C}}$ gibt, deren Fundamentalgruppe gleich G ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 28.13. (6 Punkte)

Wir betrachten die lineare Operation der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}/(3)$ auf $\mathbb{C}^4$ durch Potenzen der Matrix

$$\begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi^2 \end{pmatrix},$$

wobei ξ eine dritte primitive Einheitswurzel sei. Bestimme den Invariantenring zu dieser Operation. Man gebe einen expliziten Erzeuger der lokalen Fundamentalgruppe des Spektrums dieses Invariantenringes an.

Aufgabe 28.14. (4 Punkte)

Zeige, dass der singuläre Ort der affinen Varietät

$$V(A^2 - BCD) \subseteq \mathbb{A}_K^4$$

(über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K) aus drei Geraden besteht, und dass diese die Bilder der Koordinatenachsen des $\mathbb{A}_K^3$ unter der in Beispiel 28.5 besprochenen Quotientenabbildung sind.