Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Arbeitsblatt 17

Übungsaufgaben

Aufgabe 17.1. Sei $b > 0$ eine positive reelle Zahl. Zeige für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$b^x = \exp(x \cdot \ln b) .$$

Aufgabe 17.2. Zeige, dass für die Exponentialfunktionen

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto a^z,$$

zur Basis $a \in \mathbb{R}_+$ die folgenden Rechenregeln gelten (dabei seien $a, b \in \mathbb{R}_+$ und $z, w \in \mathbb{C}$, bei (4) sei zusätzlich $z \in \mathbb{R}$).

(1) $a^{z+w} = a^z \cdot a^w$.
(2) $a^{-z} = \frac{1}{a^z}$.
(3) $(ab)^z = a^z b^z$.
(4) $(a^z)^w = a^{zw}$.

Aufgabe 17.3. Zeige, dass die Logarithmen zur Basis b die folgenden Rechenregeln erfüllen.

(1) Es ist $\log_b(b^x) = x$ und $b^{\log_b(y)} = y$, das heißt der Logarithmus zur Basis b ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion zur Basis b.
(2) Es gilt $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$
(3) Es gilt $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ für $u \in \mathbb{R}$.
(4) Es gilt

$$\log_a y = \log_a \left(b^{\log_b y}\right) = \log_b y \cdot \log_a b.$$

Aufgabe 17.4. Es sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit dem Grenzwert z und $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge positiver reeller Zahlen mit dem positiven Grenzwert a. Zeige, dass die durch $w_n = a_n^{z_n}$ definierte Folge gegen a^z konvergiert.

Aufgabe 17.5. Es sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit dem Grenzwert z und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge positiver reeller Zahlen mit dem Grenzwert 0. Zeige durch Beispiele, dass die durch $w_n = a_n^{z_n}$ definierte Folge nicht konvergieren muss.

Aufgabe 17.6. Es sei a_i , $i \in I$, eine summierbare Familie komplexer Zahlen und $J \subseteq I$ eine Teilmenge. Zeige, dass auch die Teilfamilie a_i , $i \in J$, summierbar ist.

Aufgabe 17.7. Sei I eine Indexmenge und a_i , $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Die Betragsfamilie $|a_i|$, $i \in I$, sei summierbar. Zeige, dass a_i , $i \in I$, summierbar ist.

Aufgabe 17.8. Sei I eine Indexmenge und a_i , $i \in I$, eine Familie von komplexen Zahlen. Zeige, dass diese Familie genau dann summierbar ist, wenn die Familie

$$|a_E| = \left| \sum_{i\in E} a_i \right|, E \subseteq I,\ E \text{ endlich}\,,$$

nach oben beschränkt ist.

Aufgabe 17.9. Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Zeige, dass die Familie

$$\frac{1}{z^k z^\ell},\ (k,\ell) \in \mathbb{N}^2\,,$$

summierbar ist.

Aufgabe 17.10. Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Berechne zur summierbaren Familie

$$\frac{1}{z^k z^\ell},\ (k,\ell) \in \mathbb{N}^2\,,$$

die Teilsummen

$$s_k = \sum_{\ell\in\mathbb{N}} \frac{1}{z^k z^\ell}$$

zu jedem $k \in \mathbb{N}$ und berechne $\sum_{k\in\mathbb{N}} s_k$.

Aufgabe 17.11. Sei $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Zu $j \in \mathbb{Z}$ sei

$$I_j = \left\{ (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 \,|\, k - \ell = j \right\} .$$

Berechne zu jedem $j \in \mathbb{Z}$ zur summierbaren Familie

$$\frac{1}{z^k z^\ell},\ (k, \ell) \in \mathbb{N}^2 ,$$

die Teilsummen

$$t_j = \sum_{(k,\ell)\in I_j} \frac{1}{z^k z^\ell}$$

und berechne $\sum_{j\in\mathbb{Z}} t_j$.

Aufgabe 17.12.*

Bestimme, ob die Familie

$$\frac{1}{q^2},\ q \in \mathbb{Q} \cap [2, 3] ,$$

summierbar ist oder nicht.

Aufgabe 17.13. Schreibe das Polynom

$$Z^3 - (2 + i)Z^2 + 3iZ + 4 - 5i$$

in der neuen Variablen $W = Z + 2 - i$.

Aufgabe 17.14. Bestimme die Koeffizienten $d_0, \ldots, d_3$ der geometrischen Reihe im Entwicklungspunkt $\frac{1}{2}$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.15. (4 Punkte)

Sei a_k , $k \in \mathbb{N}$, eine Familie von komplexen Zahlen. Zeige, dass diese Familie genau dann summierbar ist, wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

absolut konvergiert.

Aufgabe 17.16. (5 Punkte)

Es sei $M \subseteq \mathbb{N}_+$ diejenige Teilmenge der natürlichen Zahlen, die aus allen Zahlen besteht, in deren Dezimalentwicklung keine 9 vorkommt. Zeige, dass

$$\sum_{n \in M} \frac{1}{n}$$

summierbar ist.

Aufgabe 17.17. (5 Punkte)

Bestimme, ob die Familie

$$\frac{1}{a^2 + b^2},\ a, b \in \mathbb{N}_+\,,$$

summierbar ist oder nicht.

Aufgabe 17.18. (5 Punkte)

Es sei I eine Indexmenge und a_i, $i \in I$, eine summierbare Familie von nichtnegativen reellen Zahlen. Zeige, dass die Teilmenge

$$J = \{i \in I \mid a_i \neq 0\}$$

abzählbar ist.

Aufgabe 17.19. (3 Punkte)

Bestimme die Koeffizienten $d_0, \ldots, d_6$ der Exponentialreihe im Entwicklungspunkt 1.