Prof. Dr. H. Brenner | Osnabrück WS 2013/2014

Analysis I

Vorlesung 1

Mengen

Georg Cantor (1845-1918) ist der Schöpfer der Mengentheorie.

David Hilbert (1862-1943) nannte sie ein *Paradies*, aus dem die Mathematiker nie mehr vertrieben werden dürfen.

Eine *Menge* ist eine Ansammlung von wohlunterschiedenen Objekten, die die *Elemente* der Menge heißen. Mit „wohlunterschieden" meint man, dass es klar ist, welche Objekte als gleich und welche als verschieden angesehen werden. Die *Zugehörigkeit* eines Elementes x zu einer Menge M wird durch

$$x \in M$$

ausgedrückt, die Nichtzugehörigkeit durch

$$x \notin M\,.$$

Für jedes Element(symbol) gilt stets genau eine dieser zwei Möglichkeiten.

Für Mengen gilt das *Extensionalitätsprinzip*, d.h. eine Menge ist durch die in ihr enthaltenen Elemente eindeutig bestimmt, darüber hinaus bietet sie keine Information. Insbesondere stimmen zwei Mengen überein, wenn beide die gleichen Elemente enthalten.

Die Menge, die kein Element besitzt, heißt *leere Menge* und wird mit

$$\emptyset$$

bezeichnet.

Eine Menge N heißt *Teilmenge* einer Menge M, wenn jedes Element aus N auch zu M gehört. Man schreibt dafür

$$N \subseteq M$$

(manche schreiben dafür $N \subset M$). Man sagt dafür auch, dass eine *Inklusion* $N \subseteq M$ vorliegt. Im Nachweis, dass $N \subseteq M$ ist, muss man zeigen, dass für ein beliebiges Element $x \in N$ ebenfalls die Beziehung $x \in M$ gilt.[1] Dabei darf man lediglich die Eigenschaft $x \in N$ verwenden.

Aufgrund des Extensionalitätsprinzips hat man das folgende wichtige *Gleichheitsprinzip für Mengen*, dass

$$M = N \text{ genau dann, wenn } N \subseteq M \text{ und } M \subseteq N$$

gilt. In der mathematischen Praxis bedeutet dies, dass man die Gleichheit von zwei Mengen dadurch nachweist, dass man (in zwei voneinander unabhängigen Teilargumentationen) die beiden Inklusionen zeigt. Dies hat auch den kognitiven Vorteil, dass das Denken eine Zielrichtung bekommt, dass klar die Voraussetzung, die man verwenden darf, von der gewünschten Schlussfolgerung, die man aufzeigen muss, getrennt wird. Hier wiederholt sich das Prinzip, dass die Äquivalenz von zwei Aussagen die wechselseitige Implikation bedeutet, und durch den Beweis der beiden einzelnen Implikationen bewiesen wird.

Beschreibungsmöglichkeiten für Mengen

Es gibt mehrere Möglichkeiten, eine Menge anzugeben. Die einfachste ist, die zu der Menge gehörenden Elemente aufzulisten, wobei es auf die Reihenfolge der Elemente nicht ankommt.

Neben endlichen Auflistungen gibt es auch noch solche Auflistungen, bei denen nach einer endlichen Auflistung eine unendliche Weiterführung durch Punkte ($\ldots$) angedeutet wird. Damit ist gemeint, dass die ersten Elemente der Auflistung einen Bildungsprozess erkennen lassen, mit dem man alle weiteren Elemente bestimmen kann. Beispiele sind

$$\{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\},\ \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\},\ \{9, 99, 999, 9999, 99999, \ldots\}$$

und ähnliche. Dies ist grundsätzlich problematisch, da es für jede endliche Liste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von n Zahlen ein Polynom

$$P(k) = c_0 + c_1 k + c_2 k^2 + c_3 k^3 + \cdots + c_d k^d$$

vom Grad $d \leq n$ gibt mit

$$P(1) = a_1,\ P(2) = a_2, \ldots, P(n) = a_n\,.$$

[1] In der Sprache der Quantorenlogik kann man eine Inklusion verstehen als die Aussage $\forall x (x \in N \rightarrow x \in M)$.

Es gibt also stets ein mehr oder weniger einfaches polynomiales Bildungsgesetz, das aber oben nur im linken Beispiel die vermutlich gemeinte Vorschrift ist.

Die wichtigste Menge, die man zumeist als eine fortgesetzte Auflistung einführt, ist die Menge der natürlichen Zahlen

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} .$$

Hier wird eine bestimmte Zahlenmenge durch die Anfangsglieder von erlaubten Zifferfolgen angedeutet. Wir werden diese Menge erstmal so akzeptieren und später noch eine Axiomatik dafür angeben.[2] Wichtig ist aber, dass mit $\mathbb{N}$ nicht eine Menge von bestimmten Ziffern gemeint ist, sondern die durch die Ziffern repräsentierten Zahlwerte. Eine natürliche Zahl hat viele Darstellungsarten, die Ziffernrepräsentation im Zehnersystem ist nur eine davon, wenn auch eine besonders übersichtliche.

Mengenbeschreibung durch Eigenschaften

Es sei eine Menge M gegeben. In ihr gibt es gewisse Elemente, die gewisse Eigenschaften E (Prädikate) erfüllen können oder aber nicht. Zu einer Eigenschaft E gehört innerhalb von M die Teilmenge bestehend aus allen Elementen aus M, die diese Eigenschaft erfüllen. Man beschreibt eine durch eine Eigenschaft definierte Teilmenge meist als

$$\{x \in M |\, E(x)\} = \{x \in M |\, x \text{ besitzt die Eigenschaft } E\} .$$

Dies geht natürlich nur mit solchen Eigenschaften, für die die Aussage $E(x)$ eine wohldefinierte Bedeutung hat. Wenn man eine solche Teilmenge einführt, so gibt man ihr häufig sofort einen Namen (in dem auf die Eigenschaft E Bezug genommen werden kann, aber nicht muss). Z.B. kann man einführen

$$G = \{x \in \mathbb{N} |\, x \text{ ist gerade}\} ,$$

$$U = \{x \in \mathbb{N} |\, x \text{ ist ungerade}\} ,$$

$$Q = \{x \in \mathbb{N} |\, x \text{ ist eine Quadratzahl}\} ,$$

$$\mathbb{P} = \{x \in \mathbb{N} |\, x \text{ ist eine Primzahl}\} .$$

Für die Mengen in der Mathematik sind meist eine Vielzahl an mathematischen Eigenschaften relevant und daher gibt es meist auch eine Vielzahl an

[2] Und zwar werden wir später die natürlichen Zahlen mittels der Peano-Axiome axiomatisieren, bis dahin verwenden wir sie aber schon manchmal, vor allem in Beispielen, ebenso wie die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.

relevanten Teilmengen. Aber auch bei alltäglichen Mengen, wie etwa die Menge K der Studierenden in einem Kurs, gibt es viele wichtige Eigenschaften, die gewisse Teilmengen festlegen, wie etwa

$$O = \{x \in K | \, x \text{ kommt aus Osnabrück}\} \ ,$$

$$P = \{x \in K | \, x \text{ studiert im Nebenfach Physik}\} \ ,$$

$$D = \{x \in K | \, x \text{ hat im Dezember Geburtstag}\} \ .$$

Die Menge K ist dabei selbst durch eine Eigenschaft festgelegt, es ist ja

$$K = \{x | \, x \text{ ist Studierender in diesem Kurs}\} \ .$$

Mengenoperationen

So, wie man Aussagen zu neuen Aussagen verknüpfen kann, gibt es Operationen, mit denen aus Mengen neue Mengen enstehen.

- *Vereinigung*

$$A \cup B := \{x | \, x \in A \text{ oder } x \in B\} \ ,$$

- *Durchschnitt*

$$A \cap B := \{x | \, x \in A \text{ und } x \in B\} \ ,$$

- *Differenzmenge*

$$A \setminus B := \{x | \, x \in A \text{ und } x \notin B\} \ .$$

Diese Operationen ergeben nur dann einen Sinn, wenn die beteiligten Mengen als Teilmengen in einer gemeinsamen Grundmenge gegeben sind. Dies sichert, dass man über die gleichen Elemente spricht. Häufig wird diese Grundmenge nicht explizit angegeben, dann muss man sie aus dem Kontext erschließen. Ein Spezialfall der Differenzmenge bei einer gegebenen Grundmenge ist das *Komplement* einer Teilmenge $A \subseteq G$, das durch

$$\complement A := G \setminus A = \{x \in G | \, x \notin A\}$$

definiert ist. Wenn zwei Mengen einen leeren Schnitt haben, also $A \cap B = \emptyset$ gilt, so nennen wir sie *disjunkt*.

Induktion

Mathematische Aussagen, die von natürlichen Zahlen abhängen, können mit dem Beweisprinzip der *vollständigen Induktion* bewiesen werden. Die folgende Aussage begründet dieses Prinzip.

Satz 1.1. *Für jede natürliche Zahl n sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Es gelte*

(1) $A(0)$ *ist wahr.*

(2) *Für alle n gilt: wenn $A(n)$ gilt, so ist auch $A(n+1)$ wahr.*

Dann gilt $A(n)$ für alle n.

Beweis. Es sei
$$M = \{n \in \mathbb{N} |\, A(n) \text{ ist wahr}\} \,.$$
Wir wollen zeigen, dass $M = \mathbb{N}$ ist, denn genau dies bedeutet, dass die Aussage für alle n gilt. Nach der ersten Bedingung ist
$$0 \in M \,.$$
Nach der zweiten Voraussetzung gilt für M, dass aus $n \in M$ stets $n+1 \in M$ folgt. Damit enthält M die 0, daher die 1, daher die 2, usw., und damit überhaupt alle natürlichen Zahlen. □

Der Nachweis von (der Gültigkeit von) $A(0)$ heißt dabei der *Induktionsanfang* und der Schluss von $A(n)$ auf $A(n+1)$ heißt der *Induktionsschluss*. Innerhalb des Induktionsschlusses nennt man die Gültigkeit von $A(0)$ auch die *Induktionsvoraussetzung*. In manchen Situationen ist die Aussage $A(n)$ erst für $n \geq n_0$ für ein gewisses n_0 (definiert oder) wahr. Dann beweist man im Induktionsanfang die Aussage $A(n_0)$ und den Induktionsschluss führt man für $n \geq n_0$ durch.

Das folgende Standardbeispiel für einen Induktionsbeweis verwendet das Summenzeichen. Für gegebene reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ bedeutet
$$\sum_{k=1}^{n} a_k \,:=\, a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n .$$
Dabei hängen im Allgemeinen die a_k in einer formelhaften Weise von k ab. Entsprechend ist das Produktzeichen definiert, nämlich
$$\prod_{k=1}^{n} a_k \,:=\, a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n .$$
Insbesondere sind für $n \in \mathbb{N}$ die Potenzen durch
$$a^n = \prod_{i=1}^{n} a = a^{n-1} \cdot a = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n-\text{mal}}$$
definiert. Dabei gelten die Konventionen $0a = 0$ und $a^0 = 1$ (die erste lässt sich auch über die Multiplikation begründen, die zweite ist aber auch sinnvoll). Als Rechenregeln für das Potenzieren gelten

(1)
$$(a \cdot b)^n \,=\, a^n \cdot b^n$$

(2)
$$a^{n+m} \,=\, a^n \cdot a^m$$

(3)
$$(a^n)^m \,=\, a^{nm}.$$

Aufgabe 1.2. Beweise durch Induktion die folgende Formel für $n \geq 1$.

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

Lösung

Beim Induktionsanfang ist $n = 1$, daher besteht die Summe links nur aus einem Summanden, nämlich der 1, und daher ist die Summe 1. Die rechte Seite ist $\frac{1 \cdot 2}{2} = 1$, so dass die Formel für $n = 1$ stimmt.

Für den Induktionsschritt setzen wir voraus, dass die Formel für ein $n \geq 1$ gilt, und müssen zeigen, dass sie auch für $n+1$ gilt. Dabei ist n beliebig. Es ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^{n} k\right) + n + 1\\ &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1\\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}\\ &= \frac{(n+2)(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Dabei haben wir für die zweite Gleichheit die Induktionsvoraussetzung verwendet. Der zuletzt erhaltene Term ist die rechte Seite der Formel für $n+1$, also ist die Formel bewiesen.

Aufgabe 1.3. Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

ein Vielfaches von 43 ist.

Lösung

Für $n = 0$ ist

$$6^2 + 7 = 43$$

ein Vielfaches von 43. Sei nun die Aussage für n bewiesen und betrachten wir den Ausdruck für $n+1$. Dieser ist

$$\begin{aligned}6^{n+1+2} + 7^{2(n+1)+1} &= 6 \cdot 6^{n+2} + 7^2 \cdot 7^{2n+1}\\ &= 6 \cdot 6^{n+2} + (6+43)7^{2n+1}\\ &= 6(6^{n+2} + 7^{2n+1}) + 43 \cdot 7^{2n+1}\\ &= 6 \cdot 43 \cdot s + 43 \cdot 7^{2n+1},\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde (nämlich die Eigenschaft, dass $6^{n+2} + 7^{2n+1}$ ein Vielfaches von 43 ist). Daher ist diese Zahl ein Vielfaches von 43.

Abbildungsverzeichnis