Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Arbeitsblatt 30

Übungsaufgaben

Aufgabe 30.1. Bestätige die in Beispiel 30.6, Beispiel 30.7 und Lemma 30.8 gefundenen Lösungskurven der Differentialgleichungen

$$y' = \frac{1}{y},\ y' = ty^3 \text{ und } y' = -ty^3$$

durch Ableiten.

Aufgabe 30.2. Interpretiere eine ortsunabhängige Differentialgleichung als eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen anhand des Lösungsansatzes für getrennte Variablen.

Aufgabe 30.3. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = y\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 30.4. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = e^y\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 30.5. Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \frac{1}{\sin y}\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 30.6. Löse die Differentialgleichung

$$y' = ty$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

Aufgabe 30.7.*

Finde eine Lösung für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{t}{t^2 - 1} y^2$$

mit $t > 1$ und $y < 0$.

Aufgabe 30.8.*

Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung ($y > 0$)

$$y' = t^2 y^3$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen. Was ist der Definitionsbereich der Lösungen?

Aufgabe 30.9.*

a) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{t^3}{y^2},\ y > 0,\ t > 0\,,$$

mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

b) Bestimme die Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = \frac{t^3}{y^2} \text{ mit } y(1) = 1\,.$$

Aufgabe 30.10. Betrachte die in Beispiel 30.9 gefundenen Lösungen

$$y(t) = \frac{g}{1 + \exp(-st)}$$

der logistischen Differentialgleichung.

a) Skizziere diese Funktion (für geeignete s und g).

b) Bestimme die Grenzwerte für $t \to \infty$ und $t \to -\infty$.

c) Studiere das Monotonieverhalten dieser Funktionen.

d) Für welche t besitzt die Ableitung von $y(t)$ ein Maximum (für die Funktion selbst bedeutet dies einen Wendepunkt, man spricht auch von einem *Vitalitätsknick*).

e) Über welche Symmetrien verfügen diese Funktionen?

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 30.11. (3 Punkte)

Zeige, dass eine Differentialgleichung der Form
$$y' = g(t) \cdot y^2$$
mit einer stetigen Funktion
$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto g(t),$$
auf einem Intervall I' die Lösungen
$$y(t) = -\frac{1}{G(t)}$$
besitzt, wobei G eine Stammfunktion zu g mit $G(I') \subseteq \mathbb{R}_+$ sei.

AUFGABE 30.12. (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung
$$y' = ty^2,\, y > 0\,,$$
mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

AUFGABE 30.13. (4 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung
$$y' = t^3y^3,\, y > 0\,,$$
mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.

AUFGABE 30.14. (3 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung
$$y' = (\,\sin t\, - 2t)\left(y^2 + 1\right),\, y > 0\,,$$
mit dem Lösungsansatz für getrennte Variablen. Welche Lösung hat das Anfangswertproblem $y(0) = \pi$?

AUFGABE 30.15. (5 Punkte)

Bestimme alle Lösungen der Differentialgleichung
$$y' = ty + t$$
mit

a) dem Lösungsansatz für inhomogene lineare Differentialgleichungen,

b) dem Lösungsansatz für getrennte Variablen.