Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Vorlesung 22

Zu einer konvergenten Potenzreihe $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ bilden die Teilpolynome $\sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k$ polynomiale Approximationen für die Funktion f im Punkt a. Ferner ist f in a beliebig oft differenzierbar und die Ableitungen lassen sich aus der Potenzreihe ablesen. Wir fragen uns nun umgekehrt, inwiefern man aus den höheren Ableitungen einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion approximierende Polynome (oder eine Potenzreihe) erhalten kann. Dies ist der Inhalt der *Taylor-Entwicklung*.

Die Taylor-Formel

Brook Taylor (1685-1731)

DEFINITION 22.1. Es sei $U \subseteq \mathbb{K}$ eine offene Teilmenge,

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine n-mal differenzierbare Funktion und $a \in U$. Dann heißt

$$T_{a,n}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

das *Taylor-Polynom vom Grad*[1] n zu f im Entwicklungspunkt a.

[1]Oder genauer das Taylor-Polynom vom Grad $\leq n$. Wenn die n-te Ableitung in a null ist, so besitzt das n-te Taylor-Polynom einen Grad kleiner als n.

Satz 22.2. *Es sei I ein reelles Intervall,*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal differenzierbare Funktion, und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Dann gibt es zu jedem Punkt $x \in I$ ein $c \in I$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Dabei kann c zwischen a und x gewählt werden.

Beweis. Sei x fixiert. In Anlehnung an die zu beweisende Aussage betrachten wir zu $r \in \mathbb{R}$ den Ausdruck

$$\begin{aligned} g_r(u) := f(x) - f(u) - f'(u)\cdot(x-u) - \frac{f^{(2)}(u)}{2!}(x-u)^2 - \ldots \\ - \frac{f^{(n)}(u)}{n!}(x-u)^n - \frac{r}{(n+1)!}(x-u)^{n+1}, \end{aligned}$$

den wir als Funktion in $u \in I$ auffassen. Es ist $g_r(x) = 0$ und wir wählen r so, dass $g_r(a) = 0$ ist, was möglich ist. Die Funktion $g(u) := g_r(u)$ ist auf dem Teilintervall $[a, x] \subseteq I$ (bzw. $[x, a]$, falls $x < a$ ist) differenzierbar und besitzt an den beiden Intervallgrenzen den Wert 0. Nach dem Satz von Rolle gibt es ein $c \in]a, x[$ mit $g'(c) = 0$.

Aufgrund der Produktregel und der Kettenregel ist (Ableitung nach u)

$$\left(\frac{f^{(k)}(u)}{k!}(x-u)^k\right)' = \frac{f^{(k+1)}(u)}{k!}(x-u)^k - \frac{f^{(k)}(u)}{(k-1)!}(x-u)^{k-1}.$$

Daher heben sich in der Ableitung von g die meisten Terme weg und es ergibt sich

$$g'(u) = -\frac{f^{(n+1)}(u)}{n!}(x-u)^n + \frac{r}{n!}(x-u)^n.$$

Aus der Gleichung

$$0 \;=\; g'(c) \;=\; -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n + \frac{r}{n!}(x-c)^n$$

folgt $r = f^{(n+1)}(c)$. Wenn wir dies und $u = a$ in die Anfangsgleichung einsetzen und $g_r(a) = 0$ ausnutzen, so ergibt sich die Behauptung. $\square$

Korollar 22.3. *Es sei I ein beschränktes abgeschlossenes Intervall,*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, $a \in I$ ein innerer Punkt und $B := \max\left(\left|f^{(n+1)}(c)\right|, c \in I\right)$. Dann gilt zwischen $f(x)$ und dem n-ten Taylor-Polynom die Fehlerabschätzung

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \le \frac{B}{(n+1)!}\,|x-a|^{n+1}.$$

Beweis. Die Zahl B existiert aufgrund von Satz 13.9, da nach Voraussetzung die $(n+1)$-te Ableitung $f^{(n+1)}$ stetig auf dem kompakten Intervall I ist. Die Aussage folgt somit direkt aus Satz 22.2. $\square$

SATZ 22.4. *Es sei I ein reelles Intervall,*

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, und $a \in I$ ein innerer Punkt des Intervalls. Es gelte

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n)}(a) = 0 \text{ und } f^{(n+1)}(a) \neq 0\,.$$

Dann gelten folgende Aussagen.

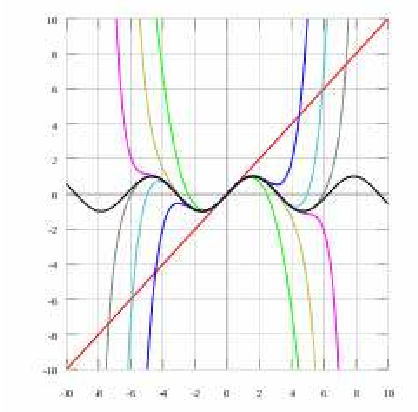
(1) *Wenn n gerade ist, so besitzt f in a kein Extremum.*
(2) *Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) > 0$ besitzt f in a ein isoliertes Minimum.*
(3) *Sei n ungerade. Bei $f^{(n+1)}(a) < 0$ besitzt f in a ein isoliertes Maximum.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen wird die Taylor-Formel zu

$$f(x) - f(a) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

mit c zwischen a und x. Je nachdem, ob $f^{(n+1)}(a) > 0$ oder $f^{(n+1)}(a) < 0$ ist, gilt auch (wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der $(n+1)$-ten Ableitung) $f^{(n+1)}(x) > 0$ bzw. $f^{(n+1)}(x) < 0$ für $x \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$ für ein geeignetes $\epsilon > 0$. Für diese x ist auch $c \in [a-\epsilon, a+\epsilon]$, so dass das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ vom Vorzeichen von $f^{(n+1)}(a)$ abhängt. Bei n gerade ist $n+1$ ungerade und daher wechselt $(x-a)^{n+1}$ das Vorzeichen (abhängig von $x > a$ oder $x < a$). Da das Vorzeichen von $f^{(n+1)}(c)$ sich nicht ändert, ändert sich das Vorzeichen von $f(x) - f(a)$. Das bedeutet, dass kein Extremum vorliegen kann. Sei nun n ungerade. Dann ist $n+1$ gerade, so dass $(x-a)^{n+1} > 0$ ist für alle $x \neq a$ in der Umgebung. Das bedeutet in der Umgebung bei $f^{(n+1)}(a) > 0$, dass $f(x) > f(a)$ ist und in a ein isoliertes Minimum vorliegt, und bei $f^{(n+1)}(a) < 0$, dass $f(x) < f(a)$ ist und in a ein isoliertes Maximum vorliegt. $\square$

Die Taylor-Reihe



Die reelle Sinusfunktion zusammen mit verschiedenen approximierenden Taylorpolynomen (von ungeradem Grad).

Definition 22.5. Es sei $U \subseteq \mathbb{K}$ eine offene Teilmenge,

$$f \colon U \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine ∞-oft differenzierbare Funktion und $a \in U$. Dann heißt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die *Taylor-Reihe* zu f im Entwicklungspunkt a.

Satz 22.6. *Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ eine Potenzreihe mit einem positivem Konvergenzradius r und*

$$f \colon U(a,r) \longrightarrow \mathbb{C}$$

die dadurch definierte Funktion. Dann ist f unendlich oft differenzierbar und die Taylor-Reihe im Entwicklungspunkt a stimmt mit der vorgegebenen Potenzreihe überein.

Beweis. Die unendliche Differenzierbarkeit folgt direkt aus Satz 20.1 durch Induktion. Daher existiert die Taylor-Reihe insbesondere im Punkt a. Es ist also lediglich noch zu zeigen, dass die n-te Ableitung von f in a den Wert $c_n n!$ besitzt. Dies folgt aber ebenfalls aus Satz 20.1. □

Beispiel 22.7. Wir betrachten die Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto f(x),$$

mit

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{falls } x > 0\,. \end{cases}$$

Wir behaupten, dass diese Funktion unendlich oft differenzierbar ist, was nur im Nullpunkt nicht offensichtlich ist. Man zeigt zunächst durch Induktion, dass sämtliche Ableitungen von $e^{-\frac{1}{x}}$ die Form $p(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x}}$ mit gewissen Polynomen $p \in \mathbb{R}[Z]$ besitzen und dass davon der Limes für $x \to 0$, $x > 0$ stets $= 0$ ist (siehe Aufgabe 22.8 und Aufgabe 22.9). Daher ist der (rechtsseitige) Limes für alle Ableitungen gleich 0 und existiert. Alle Ableitungen am Nullpunkt haben also den Wert null und daher ist die Taylor-Reihe im Nullpunkt die Nullreihe. Die Funktion f ist aber in keiner Umgebung des Nullpunktes die Nullfunktion, da $e^{-\frac{1}{x}} > 0$ ist.

Abbildungsverzeichnis