Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2014**

Analysis II

Vorlesung 39

Integration von stetigen Wegen

Für eine stetige Kurve

$$g\colon I \longrightarrow V$$

in einem endlichdimensionalen reellen Vektorraum definieren wir für $a, b \in I$ das *Integral* $\int_a^b g(s)ds$ komponentenweise, d.h. man wählt eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V und drückt die stetige Kurve durch ihre Komponentenfunktionen $g_1, \ldots, g_n$ aus. Dann setzt man

$$\int_a^b g(s)ds := \left(\int_a^b g_1(s)ds\right) v_1 + \cdots + \left(\int_a^b g_n(s)ds\right) v_n .$$

Das Ergebnis ist ein Vektor in V, der unabhängig von der gewählten Basis ist. Wenn man die untere Intervallgrenze a fixiert und die obere Intervallgrenze $b = t$ variiert, so bekommt man eine *Integralkurve*

$$I \longrightarrow V,\, t \longmapsto \int_a^t g(s)\, ds.$$

Diese Integralkurve kann man wieder ableiten und erhält die Ausgangskurve zurück, d.h. es gilt wieder der Hauptsatz der Infinitesimalrechnung.

Es gilt die folgende Integralabschätzung.

Satz 39.1. *Es sei V ein euklidischer Vektorraum und*

$$g\colon [a,b] \longrightarrow V$$

eine stetige Abbildung. Dann gilt

$$|| \int_a^b g(t)\, dt \, || \leq \int_a^b || g(t) || \, dt.$$

Beweis. Wenn $\int_a^b g(t)\, dt = 0$ ist, so ist nichts zu zeigen. Sei also

$$\int_a^b g(t)\, dt \;=\; v \;\neq\; 0.$$

Es sei $u_1 := \frac{v}{||v||}$. Das ergänzen wir zu einer Orthonormalbasis $u_1, u_2, \ldots, u_n$ von V. Es seien $g_1, g_2, \ldots, g_n$ die Koordinatenfunktionen von g bezüglich dieser Basis. Dann besteht aufgrund unserer Basiswahl die Beziehung

$$v \;=\; \int_a^b g(t)\, dt$$

$$\begin{aligned} &= \left(\int_a^b g_1(t)\,dt\right) u_1 + \cdots + \left(\int_a^b g_n(t)\,dt\right) u_n \\ &= \left(\int_a^b g_1(t)\,dt\right) u_1. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\begin{aligned} \left|\left|\int_a^b g(t)\,dt\right|\right| &= \left|\int_a^b g_1(t)\,dt\right| \\ &\leq \int_a^b |g_1(t)|\,dt \\ &\leq \int_a^b \sqrt{(g_1(t))^2 + \cdots + (g_n(t))^2}\,dt \\ &= \int_a^b ||\,g_1(t)u_1 + \cdots + g_n(t)u_n\,||\,dt \\ &= \int_a^b ||\,g(t)\,||\,dt. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 39.2. Die Abschätzung aus Satz 39.1 ist im Allgemeinen recht grob. Wenn beispielsweise $g = f'$ die Ableitung einer stetig differenzierbaren Kurve

$$f\colon [a,b] \longrightarrow V$$

ist, so ist die rechte Seite gleich

$$\int_a^b ||\,g(t)\,||\,dt = \int_a^b ||\,f'(t)\,||\,dt = L_a^b(f),$$

also nach Satz 38.6 die Kurvenlänge von f. Die linke Seite ist hingegen

$$\left|\left|\int_a^b g(t)\,dt\right|\right| = ||\,f(b) - f(a)\,||\,.$$

Die Abschätzung ist also in diesem Fall trivial, da ja die Kurvenlänge nach Definition 38.5 das Supremum der Längen der interpolierenden Streckenzüge ist, und $||\,f(b) - f(a)\,||$ ist die Länge der direkten Strecke.

Bemerkung 39.3. Aus Satz 39.1 kann man Satz 38.1 für eine stetig differenzierbare Kurve

$$f\colon I \longrightarrow V$$

gewinnen. Mit $g = f'$ ist nämlich

$$||\,f(b) - f(a)\,|| = \left|\left|\int_a^b g(t)\,dt\right|\right| \leq \int_a^b ||\,g(t)\,||\,dt = (b-a)\,||\,g(c)\,|| = (b-a)\,||\,f'(c)\,||$$

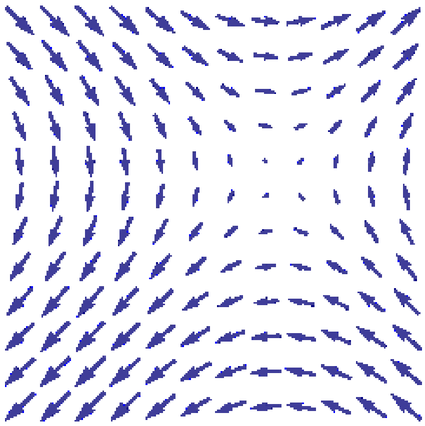
für ein gewisses $c \in [a,b]$, dessen Existenz aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung (in einer Variablen) folgt.

Vektorfelder

Definition 39.4. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum, $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und $U \subseteq V$ eine offene Menge. Dann nennt man eine Abbildung

$$f\colon I \times U \longrightarrow V,\ (t,v) \longmapsto f(t,v),$$

ein *Vektorfeld* (auf U).



Die übliche physikalische Interpretation ist hierbei, dass t die Zeit repräsentiert, v den Ort und $f(t,v) \in V$ einen Vektor, der zum Zeitpunkt t an den Ortspunkt v angeheftet ist und dort eine Richtung vorgibt. Manchmal spricht man auch von einem *Richtungsfeld*. Im physikalischen Kontext werden die Vektoren als Geschwindigkeitsvektoren, als Kraftvektoren oder als Beschleunigungsvektoren interpretiert.

Wenn das Vektorfeld nicht von t abhängt, so spricht man von einem *zeitunabhängigen* oder *autonomen Vektorfeld*.

Wir werden im Rahmen der Differentialgleichungen auf zeitabhängige Vektorfelder zurückkommen. Zuerst untersuchen wir zeitunabhängige Vektorfelder und Wegintegrale.

Wegintegrale

Definition 39.5. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge,

$$F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetiges Vektorfeld und

$$\gamma\colon [a,b] \longrightarrow U$$

eine stetig differenzierbare Kurve. Dann heißt

$$\int_\gamma F := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt$$

das *Wegintegral* zum Vektorfeld F längs des Weges γ.

Statt Wegintegral sagt man auch *Kurvenintegral*. Die stetige Differenzierbarkeit sichert dabei, dass die Ableitung γ' und damit auch der Integrand $t \mapsto \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle$ stetig sind, sodass das Integral existiert.

Wenn der Weg γ nur (stetig und) stückweise stetig differenzierbar ist, wenn es also eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ gibt derart, dass die Einschränkungen[1] $\gamma_i := \gamma_{[a_{i-1}, a_i]}$ stetig differenzierbar sind, so setzt man

$$\int_\gamma F := \int_{\gamma_1} F + \int_{\gamma_2} F + \cdots + \int_{\gamma_n} F \, .$$

Bemerkung 39.6. Das Vektorfeld

$$F \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

sei durch die Komponentenfunktionen

$$F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n)$$

und die Kurve durch die Komponentenfunktionen

$$(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$$

mit der Ableitung

$$(\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$$

gegeben. Dann wird das Wegintegral durch

$$\begin{aligned} \int_\gamma F &= \int_a^b F_1(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)) \cdot \gamma_1'(t) + \cdots + F_n(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)) \cdot \gamma_n'(t) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_a^b F_i(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)) \cdot \gamma_i'(t) dt \end{aligned}$$

berechnet.

Beispiel 39.7. Wir betrachten das Vektorfeld

$$F \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, (x, y) \longmapsto (x^2 - y^3, xy)$$

und den Weg

$$\gamma \colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, t \longmapsto (t^2, t^3 - 5t).$$

Die Ableitung von γ ist

$$\gamma'(t) = (2t, 3t^2 - 5).$$

[1] Hier haben die γ_i eine andere Bedeutung wie in der folgenden Bemerkung, wo sie die Komponentenfunktionen bezeichnen.

Daher ist das Wegintegral zu diesem Vektorfeld längs dieser Kurve gleich

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F &= \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\
&= \int_0^1 (\gamma_1(t)^2 - \gamma_2(t)^3) \cdot \gamma_1'(t) + \gamma_1(t)\gamma_2(t) \cdot \gamma_2'(t) dt \\
&= \int_0^1 (t^4 - (t^3 - 5t)^3) \cdot 2t + t^2(t^3 - 5t) \cdot (3t^2 - 5) dt \\
&= \int_0^1 (t^4 - t^9 + 15t^7 - 75t^5 + 125t^3)2t + t^2(3t^5 - 5t^3 - 15t^3 + 25t) dt \\
&= \int_0^1 2t^5 - 2t^{10} + 30t^8 - 150t^6 + 250t^4 + 3t^7 - 20t^4 + 25t^3 dt \\
&= \int_0^1 -2t^{10} + 30t^8 + 3t^7 - 150t^6 + 2t^5 + 230t^4 + 25t^3 dt \\
&= \left(-\frac{2}{11}t^{11} + \frac{10}{3}t^9 + \frac{3}{8}t^8 - \frac{150}{7}t^7 + \frac{1}{3}t^6 + 46t^5 + \frac{25}{4}t^4 \right) |_0^1 \\
&= \frac{-336 + 6160 + 693 - 39600 + 616 + 85008 + 11550}{1848} \\
&= \frac{64091}{1848}.
\end{aligned}$$

Beispiel 39.8. Wir betrachten das Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x, y) \longmapsto (-3x, 5y).$$

Für einen stetig differenzierbaren Weg

$$\gamma\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto \gamma(t),$$

ist das Wegintegral zu diesem Vektorfeld gleich

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F &= \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle dt \\
&= \int_a^b -3\gamma_1(t) \cdot \gamma_1'(t) + 5\gamma_2(t) \cdot \gamma_2'(t) dt \\
&= \left(-\frac{3}{2}(\gamma_1(t))^2 + \frac{5}{2}(\gamma_2(t))^2 \right) |_a^b \\
&= -\frac{3}{2}(\gamma_1(b))^2 + \frac{5}{2}(\gamma_2(b))^2 + \frac{3}{2}(\gamma_1(a))^2 - \frac{5}{2}(\gamma_2(a))^2.
\end{aligned}$$

Insbesondere hängt dieser Wert nur von $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ ab, also dem Anfangspunkt und dem Endpunkt der Bewegung, nicht aber vom Verlauf des Weges.

Das folgende Beispiel zeigt, dass für einen *geschlossenen Weg* γ, wo also $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist, das Wegintegral nicht 0 sein muss. Wir werden allerdings später sehen, dass *Gradientenfelder* (*Potentialfelder*) die Eigenschaft besitzen, dass die Wegintegrale nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängen.

Beispiel 39.9. Wir betrachten das Vektorfeld

$$F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, (x,y) \longmapsto (-y,x)$$

und den Weg

$$\gamma\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\, t \longmapsto (\cos t\,,\, \sin t\,).$$

Die Ableitung von γ ist

$$\gamma'(t) \;=\; (-\sin t\,,\, \cos t\,).$$

Daher ist das Wegintegral zu diesem Vektorfeld längs dieser Kurve gleich

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F &= \int_0^{2\pi} \langle F, \gamma'(t)\rangle \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t \, dt \\
&= \int_0^{2\pi} 1 dt \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Bemerkung 39.10. Bei der üblichen pysikalischen Interpretation eines Wegintegrals stellt man sich das Vektorfeld als ein Kraftfeld und den Weg als die Bewegung eines Massepunktes vor. Dabei ist die Bewegung erzwungen, d.h. es handelt sich nicht um die natürliche Bewegung, die das Kraftfeld bewirkt, sondern um eine geführte Bewegung. Eine solche Bewegung erfordert einen Arbeitsaufwand, wenn sie gegen das Kraftfeld durchgeführt wird, und setzt Energie frei, wenn sie mit der Kraft geführt wird. Entscheidend ist dabei der Winkel zwischen der momentanten Bewegungsrichtung zu einem Zeitpunkt t und dem Kraftfeld zum Ortspunkt $\gamma(t)$. Daher taucht in der Definition des Wegintegrals das Skalarprodukt zwischen Vektorfeld und Bewegungsrichtung auf. Das gesamte Wegintegral ist die Arbeit, die man längs des Weges in dem Kraftfeld verrichtet.

Satz 39.11. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge,*

$$F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetiges Vektorfeld und

$$\gamma\colon [a,b] \longrightarrow U$$

eine stetig differenzierbare Kurve. Es sei

$$g\colon [c,d] \longrightarrow [a,b]$$

eine bijektive, monoton wachsende, stetig differenzierbare Funktion und sei $\tilde{\gamma} = \gamma \circ g$. Dann gilt

$$\int_\gamma F \;=\; \int_{\tilde{\gamma}} F.$$

Beweis. Es seien $F_1, \ldots, F_n$ die Komponentenfunktionen von F und $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ die Komponentenfunktionen von γ. Dann gilt unter Verwendung von Korollar 25.9 mit der Substitution $t = g(s)$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma F &= \sum_{i=1}^n \int_a^b F_i\left(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)\right) \cdot \gamma_i'(t) dt \\
&= \sum_{i=1}^n \int_c^d F_i\left(\gamma_1(g(s)), \ldots, \gamma_n(g(s))\right) \cdot \gamma_i'(g(s)) \cdot g'(s) ds \\
&= \sum_{i=1}^n \int_c^d F_i\left(\tilde{\gamma}_1(s), \ldots, \tilde{\gamma}_n(s)\right) \cdot \tilde{\gamma}_i'(s) ds \\
&= \int_{\tilde{\gamma}} F.
\end{aligned}$$

□

Die Funktion $g\colon [c, d] \to [a, b]$ nennt man in diesem Zusammenhang eine (orientierungserhaltende) *Umparametrisierung*. Der Satz besagt, dass das Wegintegral nur von dem durchlaufenen Weg (einschließlich der Richtung) abhängt, nicht aber von der Geschwindigkeit, mit der das passiert. Wenn die Funktion g monoton fallend ist, so vertauschen sich bei der Substitution die Integrationsgrenzen und man erhält

$$\int_\gamma F = -\int_{\tilde{\gamma}} F.$$

Diese Beziehung gilt insbesondere, wenn der Weg γ in umgekehrter Richtung durchlaufen wird.

Abbildungsverzeichnis