Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

8. Beispielklausur mit Lösungen

AUFGABE 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *Ordnungs*relation $\preccurlyeq$ auf einer Menge I.
(2) Eine *Cauchy-Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem angeordneten Körper K.
(3) Der *Körper der komplexen Zahlen* (mit den Verknüpfungen).
(4) Die *Abzählbarkeit* einer Menge M.
(5) Der *Differenzenquotient* zu einer Funktion

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{K}$$

in einem Punkt $a \in D$ einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{K}$.
(6) Eine *konvexe Teilmenge* $T \subseteq \mathbb{R}^n$.
(7) Das *Unterintegral* einer nach unten beschränkten Funktion

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

(8) Ein *Anfangswertproblem* auf einer offenen Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ zu einer Funktion

$$f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Lösung

(1) Die Relation $\preccurlyeq$ heißt *Ordnungsrelation*, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind.
  (a) Es ist $i \preccurlyeq i$ für alle $i \in I$.
  (b) Aus $i \preccurlyeq j$ und $j \preccurlyeq k$ folgt stets $i \preccurlyeq k$.
  (c) Aus $i \preccurlyeq j$ und $j \preccurlyeq i$ folgt $i = j$.
(2) Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in K heißt Cauchy-Folge, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:
Zu jedem $\epsilon \in K$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$|x_n - x_m| \leq \epsilon$$

gilt.
(3) Die Menge

$$\mathbb{R}^2$$

mit $0 := (0,0)$ und $1 := (1,0)$, mit der komponentenweisen Addition und der durch

$$(a,b)\cdot(c,d) \;:=\; (ac-bd, ad+bc)$$

definierten Multiplikation nennt man *Körper der komplexen Zahlen*.

(4) Die Menge M heißt abzählbar, wenn sie leer ist oder wenn es eine surjektive Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow M$$

gibt.

(5) Zu $x \in D$, $x \neq a$, heißt die Zahl

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

der Differenzenquotient von f zu a und x.

(6) Die Teilmenge T heißt konvex, wenn mit je zwei Punkten $P, Q \in T$ auch jeder Punkt der Verbindungsstrecke (also jeder Punkt der Form $rP + (1-r)Q$ mit $r \in [0,1]$) ebenfalls zu T gehört.

(7) Das Supremum von sämtlichen Untersummen von unteren Treppenfunktionen von f das *Unterintegral* von f.

(8) Man nennt

$$y' = f(t,y) \text{ und } y(t_0) = y_0$$

das Anfangswertproblem zur gewöhnlichen Differentialgleichung $y' = f(t,y)$ mit der *Anfangsbedingung* $y(t_0) = y_0$.

Aufgabe 2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Der *Satz über beschränkte Teilmengen* von $\mathbb{R}$.
(2) Der *Satz über die Interpolation durch Polynome*.
(3) Der *zweite Mittelwertsatz* der Differentialrechnung.
(4) Der Satz über *partielle Integration*.

Lösung

(1) Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.

(2) Es sei K ein Körper und es seien n verschiedene Elemente $a_1, \ldots, a_n \in K$ und n Elemente $b_1, \ldots, b_n \in K$ gegeben. Dann gibt es ein Polynom $P \in K[X]$ vom Grad $\leq n-1$ derart, dass $P(a_i) = b_i$ für alle i ist.

(3) Es sei $b > a$ und seien

$$f, g\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktionen mit

$$g'(x) \;\neq\; 0$$

für alle $x \in]a,b[$. Dann ist $g(b) \neq g(a)$ und es gibt ein $c \in]a,b[$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

(4) Es seien

$$f, g\colon\ [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = fg|_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt\,.$$

Aufgabe 3. Es seien $M_1, \ldots, M_k$ und $N_1, \ldots, N_k$ nichtleere Mengen und

$$\varphi_i\colon\ M_i \longrightarrow N_i$$

Abbildungen für $i = 1, \ldots, k$. Es sei $M = M_1 \times \cdots \times M_k$, $N = N_1 \times \cdots \times N_k$, und φ die Produktabbildung, also

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow N,\ (x_1, \ldots, x_k) \longmapsto (\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_k(x_k)).$$

a) Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn alle φ_i surjektiv sind.

b) Zeige, dass a) nicht gelten muss, wenn die beteiligten Mengen leer sein dürfen.

Lösung

a) Seien alle φ_i surjektiv und sei $y = (y_1, \ldots, y_k) \in N$. Zu jedem i gibt es ein $x_i \in M_i$ mit $\varphi(x_i) = y_i$. Daher ist $x = (x_1, \ldots, x_k)$ ein Urbild von y unter φ.

Sei umgekehrt φ surjektiv, und sei $y_i \in N_i$ gegeben. Da die N_j alle nicht leer sind, gibt es jeweils ein $a_j \in N_j$. Wir setzen

$$y = (a_1, \ldots, a_{i-1}, y_i, a_{i+1}, \ldots, a_k) \in N\,.$$

Dafür gibt es nach Voraussetzung ein Urbild $x \in M$. Für die i-te Komponente davon muss $\varphi_i(x_i) = y_i$ gelten.

b) Sei $M_1 = N_1 = \emptyset$, sei φ_1 die leere Abbildung und seien M_2 und N_2 irgendwelche (nichtleere) Mengen und sei $\varphi_2\colon\ M_2 \to N_2$ eine beliebige nicht surjektive Abbildung. Dann ist $M = \emptyset \times M_2 = \emptyset$ und $N = \emptyset \times N_2 = \emptyset$ und daher ist die Produktabbildung $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$ ebenfalls die leere Abbildung, also surjektiv, obwohl nicht alle φ_i surjektiv sind.

Aufgabe 4. Zeige, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Abschätzung

$$3^n \geq n^3$$

gilt.

Lösung

Für $n = 1, 2, 3$ ergibt sich die Abschätzung durch direktes Nachrechnen. Für $n \geq 4$ wird die Aussage durch Induktion bewiesen. Wir nehmen also an, dass die Aussage für ein $n \geq 3$ schon bewiesen ist und haben sie für $n + 1$ zu zeigen. Dies ergibt sich aus

$$\begin{aligned} 3^{n+1} &= 3 \cdot 3^n \\ &\geq 3n^3 \\ &= n^3 + n^3 + n^3 \\ &\geq n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \\ &= (n+1)^3, \end{aligned}$$

wobei wir in der zweiten Zeile die Induktionsvoraussetzung, in der vierten Zeile die Voraussetzung $n \geq 3$ und in der fünften Zeile die binomische Formel angewendet haben.

Aufgabe 5. Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n},\ n \in \mathbb{N}_+ .$$

Lösung

Für reelles x ist immer $-1 \leq \sin x \leq 1$. Somit ist

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_+$. Da die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}_+}$ gegen 0 konvergiert und dies auch für die negative Folge $\left(-\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}_+}$ gilt, muss aufgrund des Quetschkriteriums auch die Folge $\left(\frac{\sin n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}_+}$ gegen 0 konvergieren.

Aufgabe 6. Bestimme, für welche komplexe Zahlen z die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n$$

konvergiert.

Lösung

Es handelt sich um eine Potenzreihe mit den Koeffizienten n^n. Sie konvergiert für $z = 0$, da dann nur ein Glied von null verschieden ist. Wir behaupten, dass die Reihe für keine weitere komplexe Zahl konvergiert. Da es sich um eine Potenzreihe handelt, genügt es, für jede reelle positive Zahl z nachzuweisen, dass die Reihe divergiert. Zu $z > 0$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}_+$ mit $kz \geq 1$. Es gilt dann auch $nz \geq 1$ für alle $n \geq k$. Wegen

$$\sum_{n=k}^{\infty} n^n z^n \geq \sum_{n=k}^{\infty} 1$$

erfüllt die Reihe nicht das Cauchy-Kriterium und kann daher nicht konvergieren.

Aufgabe 7. Es sei

$$f(x) = x^3 + x - 1 .$$

a) Zeige, dass die Funktion f im rellen Intervall $[0, 1]$ genau eine Nullstelle besitzt.

b) Berechne die erste Nachkommastelle im Zehnersystem dieser Nullstelle.

c) Man gebe eine rationale Zahl $q \in [0, 1]$ derart an, dass $|f(q)| \leq \frac{1}{10}$ ist.

Lösung

a) Es ist $f(0) = -1$ und $f(1) = 1$, daher besitzt die stetige Funktion aufgrund des Zwischenwertsatzes mindestens eine Nullstelle in $[0, 1]$. Die Ableitung ist $f'(x) = 3x^2 + 1$ und dies ist in diesem Intervall positiv, so dass die Funktion f dort streng wachsend ist. Also kann sie nicht mehr als eine Nullstelle besitzen.

b) Für $x = 1/2 = 0,5$ ist

$$f(1/2) = 1/8 + 1/2 - 1 < 0 ,$$

die Nullstelle muss also in der rechten Intervallhälfte liegen. Für $x = 0,8$ ergibt sich

$$f(0,8) = (0,8)^3 + 0,8 - 1 = 0,512 + 0,8 - 1 = 0,312 > 0 ,$$

so dass dieser Wert zu groß ist. Für $x = 0,7$ ergibt sich

$$f(0,7) = (0,7)^3 + 0,7 - 1 = 0,343 + 0,7 - 1 = 0,043 > 0 ,$$

was immer noch zu groß ist. Für $x = 0,6$ ergibt sich

$$f(0,6) = (0,6)^3 + 0,6 - 1 = 0,216 + 0,6 - 1 = -0,184 < 0 .$$

Die Nullstelle liegt also im offenen Intervall zwischen $0,6$ und $0,7$ und die erste Nachkommastelle ist 6.

c) Wie unter b) berechnet ist $f(0,7) = 0,043 < 0,1$, so dass man $q = 0,7$ nehmen kann.

Aufgabe 8. Man gebe ein Beispiel einer Funktionenfolge

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

derart, dass sämtliche f_n nicht stetig sind, die Funktionenfolge aber gleichmäßig gegen eine stetige Grenzfunktion konvergiert.

Lösung

Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}_+$ die Funktionenfolge

$$f_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die durch

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \neq 0, \\ \frac{1}{n}, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

gegeben ist. Diese Funktionen sind nicht stetig, da der Limes für x gegen 0 stets $0 \neq \frac{1}{n}$ ist. Wir behaupten, dass diese Folge gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert, die als konstante Funktion stetig ist. Dazu sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es gibt dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $1/n_0 \leq \epsilon$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \geq n_0$ gilt dann

$$|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \epsilon.$$

Aufgabe 9. Bestimme den Grenzwert von

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x + 1}$$

im Punkt 1, und zwar

a) mittels Polynomdivision,

b) mittels der Regel von l'Hospital.

Lösung

a) Durch Polynomdivision erhält man $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ und $x^3 - 2x + 1 = (x-1)(x^2 + x - 1)$. Daher ist

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x + 1} = \frac{x-2}{x^2 + x - 1}.$$

Daher ist

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x-2}{x^2 + x - 1} = \frac{-1}{1} = -1.$$

b) Die Ableitungen sind $(x^2 - 3x + 2)' = 2x - 3$ und $(x^3 - 2x + 1)' = 3x^2 - 2$, die beide für $x = 1$ keine Nullstelle besitzen. Nach der Regel von l'Hospital ist daher

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{2x - 3}{3x^2 - 2} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Aufgabe 10. Bestimme direkt (ohne Verwendung von Ableitungsregeln) die Ableitung der Funktion

$$f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 3,$$

in einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R}$.

Lösung

Wir betrachten den Differenzenquotient

$$\begin{aligned}
\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^3+2(a+h)^2-5(a+h)+3-(a^3+2a^2-5a+3)}{h} \\
&= \frac{a^3+3a^2h+3ah^2+h^3+2a^2+4ah+2h^2-5a-5h+3-a^3-2a^2+5a-3}{h} \\
&= \frac{3a^2h+3ah^2+h^3+4ah+2h^2-5h}{h} \\
&= 3a^2+3ah+h^2+4a+2h-5 \\
&= 3a^2+4a-5+3ah+h^2+2h.
\end{aligned}$$

Die Ableitung ist der Limes von diesem Ausdruck für h gegen 0, und dieser ist

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\left(3a^2+4a-5+3ah+h^2+2h\right) &= 3a^2+4a-5+\lim_{h\to 0} h(3a+h+2) \\
&= 3a^2+4a-5.
\end{aligned}$$

Die Ableitung ist also $3a^2+4a-5$.

Aufgabe 11. (5 Punkte)

Beweise die Kettenregel für die Hintereinanderschaltung $g\circ f$ von zwei differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

Aufgabe 12. Betrachte die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longmapsto f(x)=(2x+3)e^{-x^2}.$$

Bestimme die Nullstellen und die lokalen (globalen) Extrema von f. Fertige eine grobe Skizze für den Funktionsverlauf an.

Lösung

Da die Exponentialfunktion keine Nullstelle besitzt, liegt nur bei $2x+3=0$, also bei $x_0=-\frac{3}{2}$ eine Nullstelle vor. Unterhalb davon ist die Funktion negativ, oberhalb davon positiv.

Zur Bestimmung der lokalen Extrema leiten wir ab, was zu

$$f'(x) = 2e^{-x^2}+(2x+3)(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}\left(-4x^2-6x+2\right)$$

führt. Die Nullstellenbestimmung der Ableitung führt auf

$$x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}=0\,.$$

Quadratisches Ergänzen führt zu

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2-\frac{9}{16}-\frac{1}{2}=0$$

bzw.

$$\left(x+\frac{3}{4}\right)^2=\frac{17}{16}\,.$$

Also ist

$$x + \frac{3}{4} = \pm\frac{\sqrt{17}}{4}$$

und somit

$$x_1 = -\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{3}{4} \text{ und } x_2 = +\frac{\sqrt{17}}{4} - \frac{3}{4}\,.$$

Für $x < x_1$ ist die Ableitung negativ, für x mit $x_1 < x < x_2$ ist sie positiv und für $x > x_2$ wieder negativ. Daher ist die Funktion f unterhalb von x_1 streng fallend, zwischen x_1 und x_2 streng wachsend und oberhalb von x_2 wieder streng fallend. Daher liegt in x_1 ein isoliertes lokales Minimum und in x_2 ein isoliertes lokales Maximum vor. Da es sonst keine lokalen Extrema gibt, und die Funktion für $x \to -\infty$ wächst, aber negativ bleibt, und für $x \to +\infty$ fällt, aber positiv bleibt, sind dies auch globale Extrema.

Aufgabe 13. Besitzt die komplexe Exponentialfunktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z \longmapsto \exp z,$$

eine differenzierbare Umkehrfunktion?

Lösung

Die komplexe Exponentialfunktion ist wegen $\exp 2\pi n = 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ nicht injektiv, daher gibt es überhaupt keine Umkehrfunktion.

Aufgabe 14. Man gebe ein Beispiel einer beschränkten Funktion

$$f\colon\ [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},$$

die nicht Riemann-integrierbar ist.

Lösung

Es sei

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Da es in jedem Intervall positiver Länge sowohl rationale als auch irrationale Zahlen gibt, besitzt eine untere Treppenfunktion zu f maximal den Wert 0 und eine obere Treppenfunktion zu f besitzt minimal den Wert 1. Daher ist das Unterintegral gleich 0 und das Oberintegral gleich 1. Daher existiert das bestimmte Integral nicht.

Aufgabe 15. Zeige (ohne Stammfunktionen zu verwenden)

$$\int_0^1 e^x dx \;=\; e - 1.$$

Lösung

Wir betrachten die äquidistante Unterteilung $\frac{i}{n}$, $i = 0, \ldots, n-1$, und die untere Treppenfunktion t, die durch $t(x) = e^{i/n}$ auf dem $i+1$-ten Teilintervall festgelegt ist. Das zugehörige Treppenintegral ist (unter Verwendung der endlichen geometrischen Reihe)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\left(1 + e^{1/n} + e^{2/n} + \cdots + e^{(n-1)/n}\right) &= \frac{1}{n}\left(1 + e^{1/n} + \left(e^{1/n}\right)^2 + \cdots + \left(e^{1/n}\right)^{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - \left(e^{1/n}\right)^n}{1 - e^{1/n}} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \frac{1 - e}{1 - e^{1/n}} \\
&= (1 - e) \cdot \frac{\frac{1}{n}}{1 - e^{1/n}} .
\end{aligned}$$

Hier ist der linke Faktor konstant. Für den rechten Faktor betrachten wir den Funktionslimes

$$\lim_{u \to 0} \frac{u}{1 - e^u} .$$

Dieser existiert nach der Regel von Hospital und sein Wert ist -1, also gilt dies auch für den rechten Faktor.

Aufgabe 16. Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2(t-1)}$$

für $t > 1$.

Lösung

Wir müssen für

$$\frac{1}{t^2(t-1)}$$

mittels Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion bestimmen. Es ist

$$\frac{1}{t^2(t-1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t-1} .$$

Multiplikation mit dem Nenner führt auf

$$1 = at(t-1) + b(t-1) + ct^2 .$$

Einsetzen von $t = 0, 1, -1$ führt auf die linearen Gleichungen

$$1 = -b,$$

$$1 = c$$

und

$$1 = 2a - 2b + c.$$

Also ist

$$a = -1,\ b = -1,\ c = 1\,.$$

Eine Stammfunktion ist also

$$-\ \ln t + \frac{1}{t} + \ln\,(t-1)\ .$$

Somit ist

$$e^{-\ \ln t + \frac{1}{t} + \ln\,(t-1)} \ = \ \frac{t-1}{t} \cdot e^{\frac{1}{t}}$$

eine Lösung der Differentialgleichung.