Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 11

Rang von Matrizen

Definition 11.1. Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann nennt man die Dimension des von den Spalten erzeugten Unterraums von K^m den *(Spalten-)Rang* der Matrix, geschrieben

$$\operatorname{rang} M .$$

Korollar 11.2. *Es sei K ein Körper und es seien V und W Vektorräume über K der Dimension n bzw. m. Es sei*

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung, die bezüglich zweier Basen durch die Matrix $M \in \operatorname{Mat}_{m \times n}(K)$ beschrieben werde. Dann gilt

$$\operatorname{rang} \varphi = \operatorname{rang} M .$$

Beweis. Siehe Aufgabe *****. □

Zur Formulierung der nächsten Aussage führen wir den *Zeilenrang* einer Matrix als die Dimension des von den Zeilen erzeugten Unterraumes ein.

Lemma 11.3. *Es sei K ein Körper und sei M eine $m \times n$-Matrix über K. Dann stimmt der Spaltenrang mit dem Zeilenrang überein. Der Rang ist gleich der in Fakt ***** verwendeten Zahl r.*

Beweis. Bei elementaren Zeilenumformungen ändert sich der von den Zeilen erzeugte Raum nicht, und damit ändert sich auch nicht der Zeilenrang. Der Zeilenrang stimmt also mit dem Zeilenrang der in Fakt ***** angegebenen Matrix in Stufenform überein. Diese hat den Zeilenrang r, da die ersten r Zeilen linear unabhängig sind und ansonsten nur Nullzeilen auftauchen. Sie hat aber auch den Spaltenrang r, da wiederum die ersten r Spalten (wenn man auch noch die Spalten vertauscht hat) linear unabhängig sind und die weiteren Spalten Linearkombinationen dieser r Spalten sind. Die Aufgabe ***** zeigt, dass sich bei elementaren Zeilenumformungen auch der Spaltenrang nicht ändert. □

Beide Ränge stimmen also überein, so dass wir im Folgenden nur noch vom Rang einer Matrix sprechen werden.

Korollar 11.4. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *M ist invertierbar.*
(2) *Der Rang von M ist n.*
(3) *Die Zeilen von M sind linear unabhängig.*
(4) *Die Spalten von M sind linear unabhängig.*

Beweis. Dies folgt aus Fakt ***** und aus Fakt *****. □

Determinanten

Definition 11.5. Es sei K ein Körper und sei $M = (a_{ij})_{ij}$ eine $n \times n$-Matrix über K. Zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ sei M_i diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die entsteht, wenn man in M die erste Spalte und die i-te Zeile weglässt. Dann definiert man rekursiv die *Determinante* von M durch

$$\det M = \begin{cases} a_{11} & \text{falls } n = 1\,, \\ \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det M_i & \text{für } n \geq 2\,. \end{cases}$$

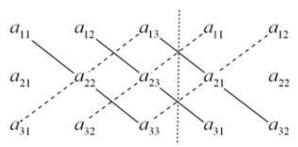
Die Determinante ist nur für quadratische Matrizen definiert. Für kleine n kann man die Determinante einfach ausrechnen.

Beispiel 11.6. Für eine 2×2-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ist

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - cb\,.$$



Beispiel 11.7. Für eine 3×3-Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

ist

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

LEMMA 11.8. *Für eine obere Dreiecksmatrix*

$$M = \begin{pmatrix} b_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & b_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix}$$

ist

$$\det M = b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n .$$

Insbesondere ist für die Einheitsmatrix

$$\det E_n = 1 .$$

Beweis. Dies folgt mit einer einfachen Induktion direkt aus der Definition der Determinante. □

Determinantenfunktionen

Wir wollen zeigen, dass die oben rekursiv definierte Determinante eine „multilineare“ „alternierende“ Abbildung ist, wenn man die Identifizierung

$$\mathrm{Mat}_n(K) \cong (K^n)^n$$

vornimmt, bei der einer Matrix das n-Tupel der Zeilen der Matrix zugeordnet wird. Wir fassen also im Folgenden eine Matrix als einen Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

auf, wobei die einzelnen Einträge v_i Zeilenvektoren der Länge n sind.

SATZ 11.9. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann ist die Determinante*

$$\mathrm{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det M,$$

multilinear. D.h., dass für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$, für $n-1$ Vektoren $v_1, \ldots, v_{k-1}, v_{k+1}, \ldots, v_n \in K^n$ und für $u, w \in K^n$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u+w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

und für $\lambda \in K$ die Gleichheit

$$\det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ \lambda u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} .$$

gilt.

Beweis. Seien

$$M := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, M' := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ und } \tilde{M} := \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{k-1} \\ u+w \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

wobei wir die Einträge analog bezeichnen. Insbesondere ist also $u = (a_{k1}, \ldots, a_{kn})$ und $w = (a'_{k1}, \ldots, a'_{kn})$. Zu jedem Vektor v sei v^* der Vektor, der entsteht, wenn man den ersten Eintrag weglässt. Zu $v_i = (a_{i1}, \ldots, a_{in})$ ist also $v_i^* = (a_{i2}, \ldots, a_{in})$. Mit dieser Notation ist

$$M_k = \begin{pmatrix} v_1^* \\ \vdots \\ v_{k-1}^* \\ v_{k+1}^* \\ \vdots \\ v_n^* \end{pmatrix} .$$

Wir beweisen die Aussage des Satzes durch Induktion nach n, wobei der Fall $n = 1$ klar ist. Für $i \neq k$ ist $\tilde{a}_{i1} = a_{i1} = a'_{i1}$ und

$$\det \tilde{M}_i = \det M_i + \det M'_i$$

nach Induktionsvoraussetzung. Für $i = k$ ist $M_k = M'_k = \tilde{M}_k$ und es ist $\tilde{a}_{k1} = a_{k1} + a'_{k1}$. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} \det \tilde{M} &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \tilde{a}_{i1} \det \tilde{M}_i \\ &= \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} (\det M_i + \det M'_i) \\ &\quad + (-1)^{k+1} (a_{k1} + a'_{k1}) (\det \tilde{M}_k) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det\, M_i + \sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det\, M_i' \\
&\quad +(-1)^{k+1} a_{k1} \det\, M_k + (-1)^{k+1} a_{k1}' \det\, M_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det\, M_i + \sum_{i\neq k,\, i=1,}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det\, M_i' \\
&\quad +(-1)^{k+1} a_{k1}' \det\, M_k \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det\, M_i + \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1}' \det\, M_i' \\
&= \det\, M + \det\, M'.
\end{aligned}
$$

Die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation beweist man ähnlich, siehe Aufgabe *****. □

SATZ 11.10. *Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_+$. Dann besitzt die Determinante*

$$\mathrm{Mat}_n(K) = (K^n)^n \longrightarrow K,\ M \longmapsto \det\, M,$$

folgende Eigenschaften.

(1) *Wenn in M zwei Zeilen übereinstimmen, so ist* $\det\, M = 0$. *D.h., dass die Determinante alternierend ist.*
(2) *Wenn man in M zwei Zeilen vertauscht, so ändert sich die Determinante mit dem Faktor -1.*

Beweis. (1) und (2) werden parallel durch Induktion über n bewiesen, wobei es für $n = 1$ nichts zu zeigen gibt. Sei also $n \geq 2$ und $M = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (a_{ij})_{ij}$. Die relevanten Zeilen seien v_r und v_s mit $r < s$. Nach Definition ist $\det\, M = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det\, M_i$. Nach Induktionsvoraussetzung für (1) sind dabei $\det\, M_i = 0$ für $i \neq r, s$, da ja dann zwei Zeilen übereinstimmen. Damit ist

$$\det\, M = (-1)^{r+1} a_{r1} \det\, M_r + (-1)^{s+1} a_{s1} \det\, M_s\,,$$

wobei $a_{r1} = a_{s1}$ ist. Die beiden Matrizen M_r und M_s haben die gleichen Zeilen, allerdings tritt die Zeile $z = v_r = v_s$ in M_r als die $(s-1)$-te Zeile und in M_s als die r-te Zeile auf. Alle anderen Zeilen kommen in beiden Matrizen in der gleichen Reihenfolge vor. Durch insgesamt $s - r - 1$ Vertauschungen von benachbarten Zeilen kann man M_r in M_s überführen. Nach der Induktionsvoraussetzung für (2) unterscheiden sich daher die Determinanten um den Faktor $(-1)^{s-r-1}$, also ist $\det\, M_s = (-1)^{s-r-1} \det\, M_r$. Setzt man dies oben ein, so erhält man

$$
\begin{aligned}
\det\, M &= (-1)^{r+1} a_{r1} \det\, M_r + (-1)^{s+1} a_{s1} \det\, M_s \\
&= a_{r1}((-1)^{r+1} \det\, M_r + (-1)^{s+1}(-1)^{s-r-1} \det\, M_r) \\
&= a_{r1}(((-1)^{r+1} + (-1)^{2s-r}) \det\, M_r)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a_{r1}(((-1)^{r+1} + (-1)^r) \det M_r) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Jetzt beweisen wir (2). Nach Teil (1) (für n) und aufgrund der Multilinearität ist

$$
\begin{aligned}
0 &= \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r + v_s \\ \vdots \\ v_r + v_s \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_r + v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_s \\ \vdots \\ v_r + v_s \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_r \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_s \\ \vdots \\ v_r \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_s \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_r \\ \vdots \\ v_s \\ \vdots \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \vdots \\ v_s \\ \vdots \\ v_r \\ \vdots \end{pmatrix} .
\end{aligned}
$$

□

SATZ 11.11. *Es sei K ein Körper und sei M eine $n \times n$-Matrix über K. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

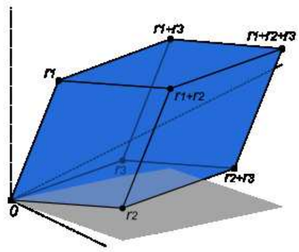
(1) $\det M \neq 0$.
(2) *Die Zeilen von M sind linear unabhängig.*
(3) *M ist invertierbar.*
(4) $\operatorname{rang} M = n$.

Beweis. Die Beziehung zwischen Rang, Invertierbarkeit und linearer Unabhängigkeit wurde schon in Fakt ***** gezeigt. Seien die Zeilen linear abhängig. Wir können nach Zeilenvertauschen annehmen, dass $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i$

ist. Dann ist nach Fakt *****

$$\det M = \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \det \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{n-1} \\ v_i \end{pmatrix} = 0.$$

Seien nun die Zeilen linear unabhängig. Dann kann man durch Zeilenvertauschungen, Skalierung und Zeilenaddition die Matrix sukzessive zur Einheitsmatrix transformieren. Dabei ändert sich die Determinante stets durch einen von null verschiedenen Faktor. Da die Determinante der Einheitsmatrix 1 ist, muss auch die Determinate der Ausgangsmatrix $\neq 0$ sein. $\square$



Bemerkung 11.12. Bei $K = \mathbb{R}$ steht die Determinante in einer engen Beziehung zu Volumina von geometrischen Objekten. Wenn man im $\mathbb{R}^n$ Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ betrachtet, so spannen diese ein *Parallelotop* auf. Dieses ist definiert als

$$P := \{a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \mid a_i \in [0,1]\}.$$

Es besteht also aus allen Linearkombinationen der Vektoren, wobei aber die Skalare auf das Einheitsintervall beschränkt sind. Wenn die Vektoren linear unabhängig sind, so handelt es sich wirklich um einen „voluminösen" Körper, andernfalls liegt ein Objekt von niedrigerer Dimension vor. Es gilt nun die Beziehung

$$\text{vol } P = |\det(v_1, \ldots, v_n)|,$$

d.h. das Volumen des Parallelotops ist der Betrag der Determinante derjenigen Matrix, die entsteht, wenn man die aufspannenden Vektoren hintereinander schreibt.

Abbildungsverzeichnis