Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Vorlesung 7

Weitere Eigenschaften der reellen Zahlen

Satz 7.1. *Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge der reellen Zahlen besitzt ein Supremum in* $\mathbb{R}$.

Beweis. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Teilmenge. Es sei $x_0 \in M$ und y_0 eine obere Schranke für M, d.h. es ist $x \leq y_0$ für alle $x \in M$. Wir konstruieren zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $x_n \in M$ wachsend, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fallend ist und jedes y_n eine obere Schranke von M ist (so dass insbesondere $x_n \leq y_n$ für alle n ist), und so, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Dabei gehen wir induktiv vor, d.h. die beiden Folgen seien bis n bereits definiert und erfüllen die gewünschten Eigenschaften. Wir setzen

$$x_{n+1} := \begin{cases} x_n, \text{ falls } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M = \emptyset\,, \\ \text{ein beliebiger Punkt aus } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

und

$$y_{n+1} := \begin{cases} \frac{x_n+y_n}{2}, \text{ falls } [\frac{x_n+y_n}{2}, y_n] \cap M = \emptyset\,, \\ y_n \text{ sonst}\,. \end{cases}$$

Dies erfüllt die gewünschten Eigenschaften, und es ist

$$y_n - x_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (y_0 - x_0)\,,$$

da in beiden Fällen der Abstand zumindest halbiert wird. Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wachsend und nach oben beschränkt ist, handelt es sich nach Fakt ***** um eine Cauchy-Folge. Wegen der Vollständigkeit besitzt die konstruierte Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert x. Ebenso ist die fallende Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die nach unten beschränkt ist, eine Cauchy-Folge mit demselben Grenzwert x. Wir behaupten, dass dieses x das Supremum von M ist. Wir zeigen zuerst, dass x eine obere Schranke von M ist. Sei dazu $z > x$ angenommen für ein $z \in M$. Da die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, gibt es insbesondere ein n mit

$$x \leq y_n < z$$

im Widerspruch dazu, dass jedes y_n eine obere Schranke von M ist. Für die Supremumseigenschaft müssen wir zeigen, dass x kleiner oder gleich jeder oberen Schranke von M ist. Sei dazu u eine obere Schranke von M und nehmen wir an, dass $x > u$ ist. Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen x konvergiert, gibt es wieder ein n mit

$$u < x_n \leq x$$

im Widerspruch dazu, dass u eine obere Schranke ist. Also liegt wirklich das Supremum vor. □

KOROLLAR 7.2. *Eine beschränkte und monotone Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist die Folge wachsend und nach oben beschränkt oder fallend und nach unten beschränkt. Nach Fakt ***** liegt eine Cauchy-Folge vor, und diese konvergiert in $\mathbb{R}$. □

DEFINITION 7.3. Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n],\ n \in \mathbb{N}\,,$$

in K heißt eine *Intervallschachtelung*, wenn $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist und wenn die Folge der Intervalllängen, also

$$(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}\ ,$$

gegen null konvergiert.

SATZ 7.4. *Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Dann besteht der Durchschnitt*

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$. Eine reelle Intervallschachtelung bestimmt also genau eine reelle Zahl.

Beweis. Siehe Aufgabe *****. □

Die Vollständigkeit der reellen Zahlen sichert auch die Existenz einer eindeutig bestimmten Quadratwurzel für eine nichtnegative reelle Zahl.

SATZ 7.5. *Zu jeder nichtnegativen reellen Zahl $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es eine eindeutige nichtnegative reelle Zahl x mit $x^2 = c$. Diese Zahl x heißt die* Quadratwurzel *von c und wird mit $\sqrt{c}$ bezeichnet.*

Beweis. Nach Aufgabe 5.1 kann es maximal zwei Zahlen geben, deren Quadrat gleich c ist, und diese Zahlen sind wegen

$$(-x)^2 \;=\; (-1)^2 x^2 \;=\; x^2$$

negativ zueinander. Es kann also maximal nur eine nichtnegative Quadratwurzel geben. Die Existenz wird durch das babylonische Wurzelziehen gesichert, das eine Intervallschachtelung beschreibt. Nach Fakt ***** legt eine Intervallschachtelung eine eindeutig bestimmte reelle Zahl fest. Nennen wir diese Zahl x. Wir müssen zeigen, dass diese Zahl in der Tat eine Quadratwurzel von c ist, dass also $x^2 = c$ ist. Bei $c = 0$ ist dies klar, wir nehmen also $c > 0$ an. Die Intervallgrenzen sind durch

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{c}{x_n}}{2}$$

und $\frac{c}{x_n}$ bestimmt und die Folge x_n konvergiert gegen x. Dies gilt auch für die „verschobene" Folge x_{n+1}. Nach den Rechengesetzen für konvergente Folgen gilt somit

$$x = \frac{x + \frac{c}{x}}{2}.$$

Dies ergibt

$$x = \frac{c}{x}$$

und somit $x^2 = c$. □

Der Satz von Bolzano-Weierstraß

Karl Weierstraß (1815-1897)

Die folgende Aussage heißt *Satz von Bolzano-Weierstraß.*

SATZ 7.6. *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge von reellen Zahlen. Dann besitzt die Folge eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei durch

$$a_0 \leq x_n \leq b_0$$

beschränkt. Wir definieren zuerst induktiv eine Intervallhalbierung derart, dass in den Intervallen unendlich viele Folgenglieder liegen. Das Startintervall ist $I_0 := [a_0, b_0]$. Sei das k-te Intervall I_k bereits konstruiert. Wir betrachten die beiden Hälften

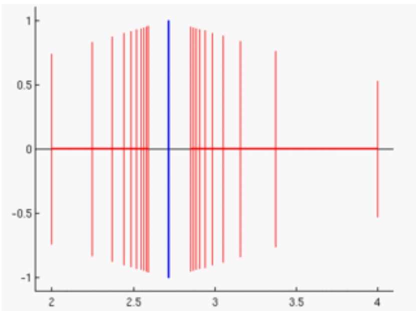
$$[a_k, \frac{a_k + b_k}{2}] \text{ und } [\frac{a_k + b_k}{2}, b_k] \, .$$

In mindestens einer der Hälften liegen unendlich viele Folgenglieder, und wir wählen als Intervall I_{k+1} eine Hälfte mit unendlich vielen Gliedern. Da sich bei diesem Verfahren die Intervalllängen mit jedem Schritt halbieren, liegt eine Intervallschachtelung vor. Als Teilfolge wählen wir nun ein beliebiges Element

$$x_{n_k} \in I_k$$

mit $n_k > n_{k-1}$. Dies ist möglich, da es in diesen Intervallen unendlich viele Folgenglieder gibt. Diese Teilfolge konvergiert gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl x. □

Die eulersche Zahl e



Wir besprechen eine Beschreibung der sogenannten *eulerschen Zahl e*.

Lemma 7.7. *Die Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$, $n \geq 1$, mit den Grenzen*

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ und } b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

definieren eine Intervallschachtelung.

Beweis. Wegen $1 + \frac{1}{n} > 1$ ist klar, dass

$$a_n < a_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = b_n$$

ist, so dass also wirklich Intervalle vorliegen. Um zu zeigen, dass die Intervalle ineinander liegen, zeigen wir, dass die unteren Grenzen wachsend und die oberen Grenzen fallend sind. Wir betrachten zuerst $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Aufgrund der Bernoulli-Ungleichung gilt

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-n\frac{1}{n^2} = 1-\frac{1}{n}.$$

Dies schreiben wir als

$$\frac{n-1}{n} \leq \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\left(\frac{n-1}{n}\right)^n.$$

Daraus ergibt sich durch beidseitige Multiplikation mit $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ (es sei $n \geq 2$) die Abschätzung

$$a_{n-1} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} \leq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = a_n.$$

Für die oberen Intervallgrenzen b_n ergibt die Bernoullische Ungleichung die Abschätzung

$$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+\frac{n}{n^2-1} \geq 1+\frac{1}{n}.$$

Daraus folgt

$$1+\frac{1}{n} \leq \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n\left(\frac{n}{n+1}\right)^n.$$

Durch beidseitige Multiplikation mit $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ ergibt sich

$$b_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \leq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = b_{n-1}.$$

Wir betrachten schließlich die Intervalllängen. Diese sind

$$b_n - a_n = a_n\left(1+\frac{1}{n}\right) - a_n = a_n\frac{1}{n} \leq \frac{b_1}{n}$$

und konvergieren somit gegen 0. Also liegt insgesamt eine Intervallschachtelung vor. $\square$

Leonhard Euler (1707-1783)

Durch diese Intervallschachtelung ist aufgrund von Fakt ***** eindeutig eine reelle Zahl bestimmt.

Definition 7.8. Die reelle Zahl

$$e := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

heißt *eulersche Zahl*.

Ihr nummerischer Wert ist

$$e = 2,718281828459\ldots.$$

Wir werden bei der Behandlung der Exponentialfunktion auf die eulersche Zahl zurückkommen und einer andere Beschreibung dafür kennenlernen.

Abbildungsverzeichnis