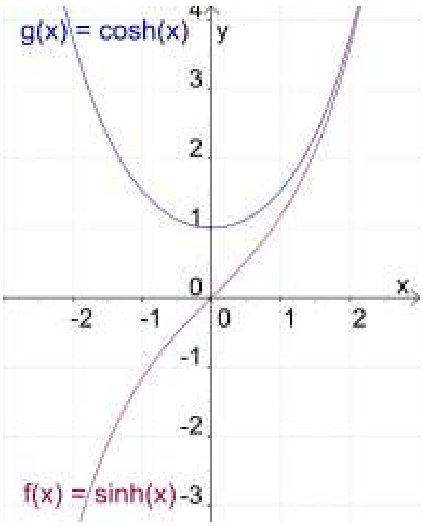
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

In dieser Vorlesung führen wir weitere wichtige Funktionen über ihre Potenzreihen ein.

Die Hyperbelfunktionen



Der Verlauf der Hyperbelfunktionen

Definition 18.1. Die für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

definierte Funktion heißt *Sinus hyperbolicus*.

Definition 18.2. Die für $x \in \mathbb{R}$ durch

$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

definierte Funktion heißt *Kosinus hyperbolicus*.

Lemma 18.3. *Die Funktionen Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus besitzen die folgenden Eigenschaften.*

(1)
$$\cosh x + \sinh x = e^x$$

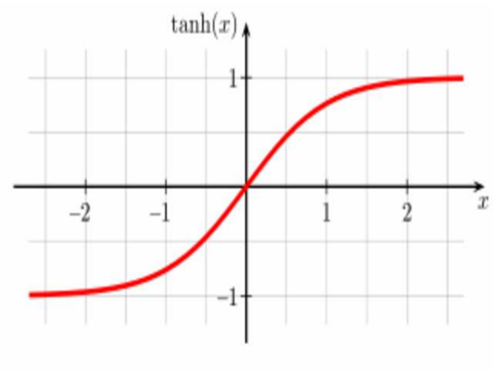
(2)
$$\cosh x - \sinh x = e^{-x}$$

(3)
$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1 \, .$$

Beweis. Siehe Aufgabe 18.1. □

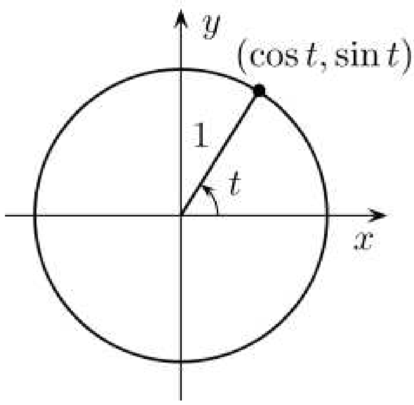
LEMMA 18.4. *Die Funktion Sinus hyperbolicus ist streng wachsend und die Funktion Kosinus hyperbolicus ist auf* $\mathbb{R}_{\leq 0}$ *streng fallend und auf* $\mathbb{R}_{\geq 0}$ *streng wachsend.*

Beweis. Siehe Aufgabe 18.2 und Aufgabe 18.14. □



DEFINITION 18.5. Die Funktion
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
definierte Funktion heißt *Tangens hyperbolicus*.

Der Kreis und die trigonometrischen Funktionen



Die trigonometrischen Funktionen *Sinus* und *Kosinus* werden in einem naiven Zugang am Einheitskreis definiert. Es sei

$$E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\, x^2 + y^2 = 1\}$$

der *Einheitskreis*, also der Kreis mit dem Radius 1 und dem Mittelpunkt $0 = (0,0)$. Für einen Punkt in der Ebene mit den Koordinanten (x,y) ist aufgrund des Satzes des Pythagoras $\sqrt{x^2+y^2}$ der Abstand zum Nullpunkt. Ein „Winkel“ α am Nullpunkt (und von der positiven „x-Achse“ aus „gegen den Uhrzeigersinn“ gemessen) definiert eine vom Nullpunkt ausgehende „Halbgerade“ (oder „Strahl“). Da diese einen eindeutigen Durchstoßungspunkt $P(\alpha) = (x,y)$ mit der Einheitskreislinie besitzt, definiert der Winkel auch einen eindeutigen Punkt auf dem Einheitskreis. Dessen Koordinaten sind nach Definition gleich

$$P(\alpha) = (\cos\alpha, \sin\alpha),$$

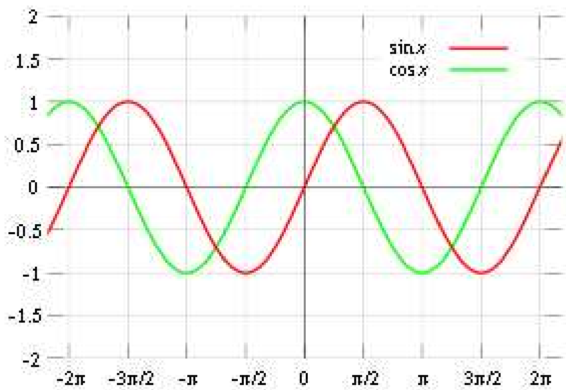
d.h. die x-Koordinate wird durch den Kosinus und die y-Koordinate wird durch den Sinus angegeben. Dadurch sind einige wichtige Eigenschaften direkt klar:

(1) Es gilt
$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1.$$
(2) Es ist $\cos 0 = 1$ und $\sin 0 = 0$.
(3) Wenn der Winkel β eine Vierteldrehung bezeichnet, so ist $\cos\beta = 0$ und $\sin\beta = 1$.
(4) Es ist $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ und $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$. Dabei bezeichnet $-\alpha$ den durch den gegenläufigen Strahl definierten Winkel.[1]
(5) Die Werte von Sinus und Kosinus wiederholen sich nach einer Volldrehung.

Diese Definition ist zwar intuitiv klar, sie ist aber in verschiedener Hinsicht unbefriedigend.

(1) Es ist nicht klar, wie der Winkel zu messen ist.
(2) Es gibt keinen analytischen „berechenbaren“ Ausdruck, wie zu einem gegebenen Winkel die Werte von Kosinus und Sinus berechnet werden müssen.
(3) Damit fehlt die Grundlage, um Gesetzmäßigkeiten dieser Funktionen zu beweisen.

[1] Dieser Winkel ist $\alpha + \pi$ im Bogenmaß.



Die Graphen von Kosinus und Sinus. Der qualitative Verlauf ist von der naiven Definition her klar. Mit der unten folgenden analytischen Definition über Reihen kann man die Funktionswerte beliebig genau ausrechnen. Für viele wichtige qualitative Eigenschaften wie die Periodizität mit der Periodenlänge 2π muss man aber die analytische Definition genauer studieren.

Mit diesen Defiziten hängt auch zusammen, dass wir noch keine präzise Definition für die Kreiszahl π haben. Diese ist bekanntlich gleich dem Kreisinhalt des Einheitskreises und gleich der Hälfte des Kreisumfanges. Doch sind sowohl der „Flächeninhalt ebener berandeter Gebiete“ als auch die „Länge von gebogenen Kurven“ problematische Begriffe. Von daher ist es in der höheren Mathematik sinnvoll, die Kreisfunktionen über ihre Potenzreihen einzuführen und nach und nach zu beweisen, dass sie die gewünschten Eigenschaften erfüllen. Sodann kann man auch die Kreiszahl π über Eigenschaften dieser Funktionen einführen und letztlich den Winkel als Länge des zugehörigen Kreisbogens einführen, nachdem diese Länge exakt definiert wird (was wir erst im zweiten Semester tun).

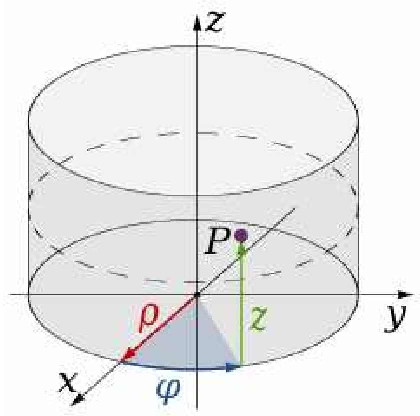
Wir besprechen einige wichtige Anwendungen der trigonometrischen Funktionen, nämlich Polarkoordinaten und Drehungen, wobei wir die Winkel naiv verstehen und die trigonometrischen Funktionen als geometrisch definiert betrachten.

Polar- und Zylinderkoordinaten

Beispiel 18.6. Ein Winkel α und eine positive reelle Zahl r definieren einen eindeutigen Punkt

$$P = (x,y) = (r \cos \alpha, r \sin \alpha) = r(\cos \alpha, \sin \alpha)$$

in der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$. Dabei bedeutet r den Abstand des Punktes P vom Nullpunkt $(0,0)$ und $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ bedeutet den Durchstoßungspunkt der durch P definierten Halbgeraden mit dem Einheitskreis. Jeder Punkt $P = (x,y) \neq 0$ besitzt eine eindeutige Darstellung mit $r = \sqrt{x^2+y^2}$ und mit einem Winkel α, der je nach dem gewählten Winkelmaß geeignet zu wählen ist, also beispielsweise aus $[0, 2\pi[$ ist (der Nullpunkt wird durch $r = 0$ und einen beliebigen Winkel repräsentiert). Die Komponenten (r, α) heißen die *Polarkoordinaten* von P.



Beispiel 18.7. Eine räumliche Variante von Beispiel 18.6 wird durch *Zylinderkoordinaten* gegeben. Ein Tripel $(r, \alpha, z) \in \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ wird dabei auf die kartesischen Koordinaten

$$(x, y, z) = (r \cos \alpha , r \sin \alpha , z)$$

abgebildet.

Beispiel 18.8. Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, kann man eindeutig schreiben als

$$z = r(\cos \alpha , \sin \alpha) = (r \cos \alpha , r \sin \alpha) = r \cos \alpha + (r \sin \alpha)i$$

mit einer eindeutig bestimmten positiven reellen Zahl r, nämlich dem Abstand von z zum Nullpunkt (also $r = |z|$) und einem eindeutig bestimmten Winkel α zwischen 0 (einschließlich) und 360 Grad (ausschließlich), der ausgehend von der positiven reellen Achse gegen den Uhrzeigersinn gemessen wird. Man spricht von *Polarkoordinaten* für die komplexen Zahlen.

Polarkoordinaten der reellen Zahlenebene und für komplexe Zahlen unterscheiden sich nicht. Allerdings erlauben Polarkoordinaten eine Neuinterpretation der Multiplikation von komplexen Zahlen: Wegen

$$\begin{aligned} & (r \cos \alpha + ir \sin \alpha) \cdot (s \cos \beta + is \sin \beta) \\ = \; & rs(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + irs(\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) \\ = \; & rs(\cos (\alpha + \beta) + i \sin (\alpha + \beta)) \end{aligned}$$

(dabei wurden im letzten Schritt die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus verwendet) multipliziert man zwei komplexe Zahlen, indem man ihre Beträge multipliziert und ihre Winkel addiert.

Diese Neuinterpretation der Multiplikation von komplexen Zahlen führt auch zu einem neuen Verständnis der Wurzeln aus komplexen Zalen, die es aufgrund des Fundamentalsatzes der Algebra geben muss. Wenn $z = r \cos \alpha + ri \sin \alpha$ ist, so ergibt sich, dass

$$w = \sqrt[n]{r} \cos \frac{\alpha}{n} + \sqrt[n]{r} i \sin \frac{\alpha}{n}$$

eine n-te Wurzel von z ist. D.h. man muss für den Betrag der komplexen Zahl die reelle n-te Wurzel nehmen und den Winkel durch n teilen.

Drehungen

Eine Drehung der reellen Ebene $\mathbb{R}^2$ um den Nullpunkt um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn bildet $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}$ ab. Daher werden ebene Drehungen folgendermaßen beschrieben.

Definition 18.9. Eine lineare Abbildung

$$D(\alpha) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die durch eine *Drehmatrix* $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ (mit einem $\alpha \in \mathbb{R}$) bezüglich der Standardbasis gegeben ist, heißt *Drehung*.

Eine *Raumdrehung* ist eine lineare Abbildung des $\mathbb{R}^3$ in sich, bei der um eine Drehachse (durch den Nullpunkt) um einen bestimmten Winkel gedreht wird. Wenn der Vektor $v_1 \neq 0$ die Drehachse definiert und u_2 und u_3 auf v_1 und aufeinander senkrecht stehen, so wird die Drehung bezüglich v_1, u_2, u_3 durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Die trigonometrischen Reihen

Wir besprechen nun den analytischen Zugang zu den trigonometrischen Funktionen.

Definition 18.10. Für $x \in \mathbb{R}$ heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

die *Kosinusreihe* und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

die *Sinusreihe* zu x.

Durch Vergleich mit der Exponentialreihe ergibt sich sofort, dass diese beiden Reihen für jedes x absolut konvergieren. Die zugehörigen Funktionen

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \text{ und } \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

heißen *Sinus* und *Kosinus*. Beide Funktionen stehen unmittelbar in Zusammenhang mit der Exponentialfunktion, wobei man allerdings die komplexen Zahlen braucht, um diesen Zusammenhang zu erkennen. Der Hintergrund ist, dass man in Potenzreihen stets auch komplexe Zahlen einsetzen kann (der Konvergenzbereich ist dann nicht ein reelles Konvergenzintervall, sondern eine Kreisscheibe). Für die Exponentialreihe und $z = ix$ (wobei x reell oder komplex sein kann) ist (wir verwenden Rechenregeln für Potenzreihen, die wir nicht behandelt haben)

$$\begin{aligned}
\exp(ix) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0,\, k \text{ gerade}}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} + \sum_{k=0,\, k \text{ ungerade}}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i(-1)^n \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos x + i \sin x .
\end{aligned}$$

Mit dieser Beziehung zwischen komplexer Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen (die die *eulersche Formel* heißt) lassen sich viele Eigenschaften der letzteren besonders einfach beweisen. Prominente Spezialfälle dieser Beziehung sind

$$e^{\pi i} = -1$$

und

$$e^{2\pi i} = 1.$$

Aufgrund von Satz 17.2 sind Sinus und Kosinus stetige Funktionen. Weitere wichtige Eigenschaften werden in der folgenden Aussage zusammengefasst.

Satz 18.11. *Die Funktionen*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \cos x ,$$

und

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \sin x ,$$

besitzen für $x, y \in \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften.

(1) *Es ist* $\cos 0 = 1$ *und* $\sin 0 = 0$.
(2) *Es ist* $\cos(-x) = \cos x$ *und* $\sin(-x) = -\sin x$.

(3) *Es gelten die Additionstheoreme*

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \, .$$

und

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \, .$$

(4) *Es gilt*

$$(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1 \, .$$

Beweis. (1) und (2) folgen direkt aus der Definition der Reihen. (3). Der $2n$-te Summand in der Kosinusreihe (die Koeffizienten zu x^i, i ungerade, sind 0) von $x+y$ ist

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n(x+y)^{2n}}{(2n)!} &= \frac{(-1)^n}{(2n)!}\sum_{i=0}^{2n}\binom{2n}{i}x^i y^{2n-i} \\
&= (-1)^n\sum_{i=0}^{2n}\frac{1}{i!(2n-i)!}x^i y^{2n-i} \\
&= (-1)^n\sum_{j=0}^{n}\frac{x^{2j}y^{2n-2j}}{(2j)!(2n-2j)!} \\
&\qquad +(-1)^n\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x^{2j+1}y^{2n-2j-1}}{(2j+1)!(2n-2j-1)!},
\end{aligned}$$

wobei wir im letzen Schritt die Indexmenge in gerade und ungerade Zahlen aufgeteilt haben.

Der $2n$-te Summand im Cauchy-Produkt von $\cos x$ und $\cos y$ ist

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j(-1)^{n-j}}{(2j)!(2(n-j))!}x^{2j}y^{2(n-j)} = (-1)^n\sum_{j=0}^{n}\frac{x^{2j}y^{2(n-j)}}{(2j)!(2(n-j))!}$$

und der $2n$-te Summand im Cauchy-Produkt von $\sin x$ und $\sin y$ ist

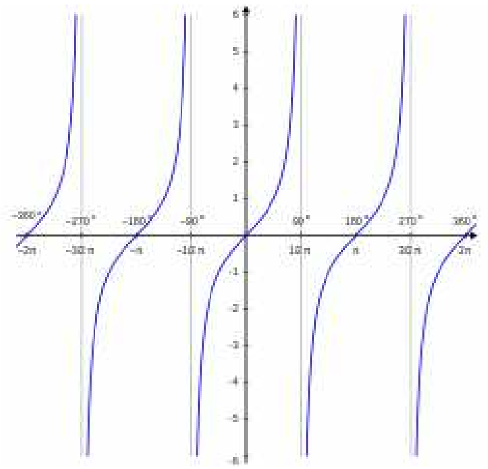
$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j(-1)^{n-1-j}}{(2j+1)!(2(n-1-j)+1)!}x^{2j+1}y^{2(n-j)+1} \\
&\qquad =(-1)^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x^{2j+1}y^{2(n-1-j)+1}}{(2j+1)!(2(n-1-j)+1)!}.
\end{aligned}$$

Daher stimmen die beiden Seiten des Additionstheorems überein. Das Additionstheorem für den Sinus folgt ähnlich. (4). Aus dem Additionstheorem für den Kosinus angewendet auf $y := -x$ und aufgrund von (2) ergibt sich

$$\begin{aligned}
1 &= \cos 0 \\
&= \cos(x-x) \\
&= \cos x \cdot \cos(-x) - \sin x \cdot \sin(-x) \\
&= \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x \, .
\end{aligned}$$

□

Die letzte Aussage im vorstehenden Satz besagt, dass das Paar $(\cos x, \sin x)$ ein Punkt auf dem *Einheitskreis* $\{(u,v) | u^2 + v^2 = 1\}$ ist. Wir werden später sehen, dass sich jeder Punkt des Einheitskreises als $(\cos x, \sin x)$ schreiben lässt, wobei man x als Winkel interpretieren kann. Dabei tritt die Periode 2π auf, wobei wir die *Kreiszahl* π eben über die trigonometrischen Funktionen einführen werden.



In der folgenden Definition für Tangens und Kotangens verwenden wir in der Formulierung der Definitionsbereiche die Zahl π.

Definition 18.12. Die Funktion

$$\mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \mathbb{Z}\pi\right) \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \tan x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

heißt *Tangens* und die Funktion

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

heißt *Kotangens*.

Abbildungsverzeichnis