

## Mathematik für Anwender I

### Vorlesung 14

#### Reihen

Wir haben in der letzten Vorlesung gesagt, dass man eine Dezimalentwicklung, also eine (unendliche) Ziffernfolge mit Ziffern zwischen 0 und 9 als eine wachsende Folge von rationalen Zahlen auffassen kann. Dabei hat die  $n$ -te Nachkommastelle  $a_{-n}$  die Bedeutung, dass  $a_{-n} \cdot 10^{-n}$  zur vorhergehenden Approximation hinzu zu addieren ist. Die Ziffernfolge gibt also direkt die Differenz der Folgenglieder an, und die Folgenglieder ergeben sich durch Aufsummieren dieser Differenzen. Diese Sichtweise führt zum Begriff der Reihe.

DEFINITION 14.1. Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge von reellen Zahlen. Unter der *Reihe*  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  versteht man die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der *Partialsommen*

$$s_n := \sum_{k=0}^n a_k.$$

Falls die Folge  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, so sagt man, dass die *Reihe konvergiert*. In diesem Fall schreibt man für den Grenzwert ebenfalls

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

und nennt ihn die *Summe* der Reihe.

Alle Begriffe für Folgen übertragen sich auf Reihen, indem man eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  als Folge der Partialsommen  $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$  auffasst. Wie schon bei Folgen kann es sein, dass die Summation nicht bei  $k = 0$ , sondern bei einer anderen Zahl beginnt.

BEISPIEL 14.2. Wir wollen die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

berechnen, wozu wir zuerst eine Formel für die  $n$ -te Partialsomme angeben. Es ist

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Diese Folge konvergiert gegen 1, so dass die Reihe konvergiert und ihre Summe gleich 1 ist.

LEMMA 14.3. *Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

*eine Reihe von reellen Zahlen. Dann ist die Reihe genau dann konvergent, wenn das folgende Cauchy-Kriterium erfüllt ist: Zu jedem  $\epsilon > 0$  gibt es ein  $n_0$  derart, dass für alle  $n \geq m \geq n_0$  die Abschätzung*

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \epsilon$$

*gilt.*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 14.6. □

LEMMA 14.4. *Es seien*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ und } \sum_{k=0}^{\infty} b_k$$

*konvergente Reihen von reellen Zahlen mit den Summen  $s$  und  $t$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$  mit  $c_k := a_k + b_k$  ist ebenfalls konvergent mit der Summe  $s + t$ .*
- (2) *Für  $r \in \mathbb{R}$  ist auch die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} d_k$  mit  $d_k := ra_k$  konvergent mit der Summe  $rs$ .*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 14.8. □

LEMMA 14.5. *Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

*eine konvergente Reihe von reellen Zahlen. Dann ist*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$$

*Beweis.* Dies folgt direkt aus Lemma 14.3. □



Nikolaus von Oresme (1330-1382) bewies, dass die harmonische Reihe divergiert.

Es ist also eine notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Reihe, dass die Reihenglieder eine Nullfolge bilden. Diese Bedingung ist nicht hinreichend, wie die *harmonische Reihe* zeigt.

BEISPIEL 14.6. Die *harmonische Reihe* ist die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

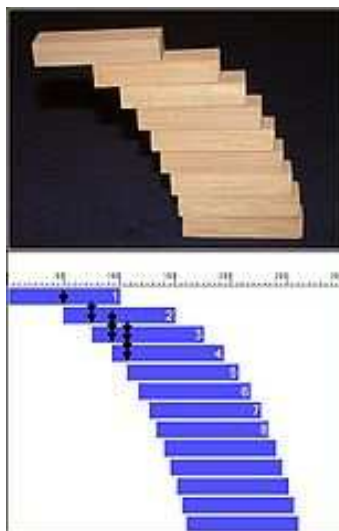
Diese Reihe divergiert: Für die  $2^n$  Zahlen  $k = 2^n + 1, \dots, 2^{n+1}$  ist

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} = 2^n \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Daher ist

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{i=0}^n \left( \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} \frac{1}{k} \right) \geq 1 + (n+1) \frac{1}{2}.$$

Damit ist die Folge der Partialsummen unbeschränkt und kann nach Lemma 12.8 nicht konvergent sein.



Aus der Divergenz der harmonischen Reihe folgt, dass man einen beliebig weiten Überhang mit gleichförmigen Bauklötzen bauen kann.

Die folgende Aussage heißt *Leibnizkriterium für alternierende Reihen*.

**SATZ 14.7.** Sei  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine fallende Nullfolge von nichtnegativen reellen Zahlen. Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x_k$ .

*Beweis.* Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt.

Wir setzen

$$s_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k x_k.$$

Wir betrachten die Teilfolge mit geradem Index. Für jedes  $n$  gilt wegen  $x_{2n+2} \leq x_{2n+1}$  die Beziehung

$$s_{2(n+1)} = s_{2n} - x_{2n+1} + x_{2n+2} \leq s_{2n},$$

d.h. diese Teilfolge ist fallend. Ebenso ist die Folge der ungeraden Teilsummen wachsend. Es gelten die Abschätzungen

$$s_0 \geq s_{2n} \geq s_{2n-1} \geq s_1.$$

Daher sind die beiden Teilfolgen fallend und nach unten beschränkt bzw. wachsend und nach oben beschränkt, und daher wegen Lemma 13.7 konvergent. Wegen  $s_{2n} - s_{2n-1} = x_{2n}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  stimmen die Grenzwerte überein.  $\square$

## Absolute Konvergenz

**DEFINITION 14.8.** Eine Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

von reellen Zahlen heißt *absolut konvergent*, wenn die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$$

konvergiert.

**SATZ 14.9.** *Eine absolut konvergente Reihe von reellen Zahlen konvergiert.*

*Beweis.* Es sei  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Wir wenden das Cauchy-Kriterium an. Aufgrund der absoluten Konvergenz gibt es ein  $n_0$  derart, dass für alle  $n \geq m \geq n_0$  die Abschätzung

$$\left| \sum_{k=m}^n |a_k| \right| = \sum_{k=m}^n |a_k| \leq \epsilon$$

gilt. Daher ist

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k \right| \leq \left| \sum_{k=m}^n |a_k| \right| \leq \epsilon,$$

was die Konvergenz bedeutet.  $\square$

**BEISPIEL 14.10.** Eine konvergente Reihe muss nicht absolut konvergieren, d.h. Satz 14.9 lässt sich nicht umkehren. Aufgrund des Leibnizkriteriums konvergiert die *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots,$$

und zwar ist ihr Grenzwert  $\ln 2$ , was wir hier aber nicht beweisen. Die zugehörige absolute Reihe ist aber die harmonische Reihe, die nach Beispiel 14.6 divergiert.

Die folgende Aussage heißt das *Majorantenkriterium*.

**SATZ 14.11.** *Sei  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  eine konvergente Reihe von reellen Zahlen und  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge reeller Zahlen mit  $|a_k| \leq b_k$  für alle  $k$ . Dann ist die Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

*absolut konvergent.*

*Beweis.* Das folgt direkt aus dem Cauchy-Kriterium.  $\square$

**BEISPIEL 14.12.** Wir wollen bestimmen, ob die Reihe

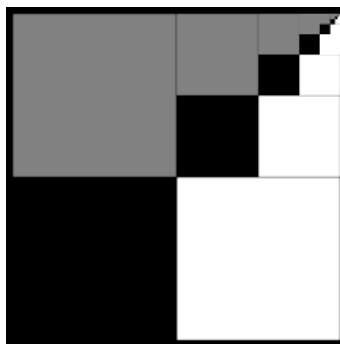
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

konvergiert oder nicht. Dazu ziehen wir das Majorantenkriterium und Beispiel 14.2 heran, wo wir die Konvergenz von  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$  gezeigt haben. Für  $k \geq 2$  ist

$$\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}.$$

Daher konvergiert  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2}$  und somit auch  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ . Über den Wert der Summe ist damit noch nichts gesagt. Mit deutlich aufwändigeren Methoden kann man zeigen, dass diese Summe gleich  $\frac{\pi^2}{6}$  ist.

### Die geometrische Reihe und das Quotientenkriterium



Dieses Bild veranschaulicht das Verhalten der geometrischen Reihe zu  $x = \frac{1}{4}$ . Die Grundseite des Quadrates sei 2, dann passt die geometrische Reihe dreimal in dieses Quadrat rein. Der jeweilige Flächeninhalt der drei Reihen ist  $\frac{4}{3}$ .

Die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  heißt *geometrische Reihe* zu  $x \in \mathbb{R}$ , es geht also um die Summe

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

Die Konvergenz hängt wesentlich vom Betrag von  $x$  ab.

**SATZ 14.13.** *Für alle reellen Zahlen  $x$  mit  $|x| < 1$  konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$  absolut und es gilt*

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

*Beweis.* Für jedes  $x$  gilt die Beziehung

$$(x-1) \left( \sum_{k=0}^n x^k \right) = x^{n+1} - 1$$

und daher gilt für die Partialsummen die Beziehung (bei  $x \neq 1$ )

$$s_n = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}.$$

Für  $n \rightarrow \infty$  und  $|x| < 1$  konvergiert dies gegen  $\frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x}$ .  $\square$

Die folgende Aussage heißt *Quotientenkriterium*.

SATZ 14.14. *Es sei*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

*eine Reihe von reellen Zahlen. Es gebe eine reelle Zahl  $q$  mit  $0 \leq q < 1$  und ein  $k_0$  mit*

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$$

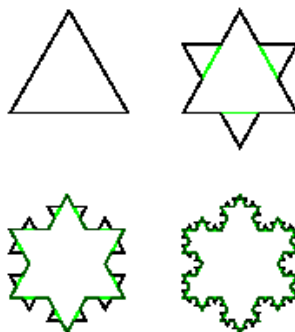
*für alle  $k \geq k_0$  (Insbesondere sei  $a_k \neq 0$  für  $k \geq k_0$ ). Dann konvergiert die Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  absolut.*

*Beweis.* Die Konvergenz<sup>1</sup> ändert sich nicht, wenn man endlich viele Glieder ändert. Daher können wir  $k_0 = 0$  annehmen. Ferner können wir annehmen, dass alle  $a_k$  nichtnegative reelle Zahlen sind. Es ist

$$a_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{a_{k-1}}{a_{k-2}} \cdots \frac{a_1}{a_0} \cdot a_0 \leq a_0 q^k.$$

Somit folgt die Konvergenz aus dem Majorantenkriterium und der Konvergenz der geometrischen Reihe.  $\square$

BEISPIEL 14.15. Unter den *Kochschen Schneeflocken* versteht man die Folge  $K_n$  der folgendermaßen rekursiv definierten ebenen Figuren: Die Ausgangsfigur  $K_0$  ist ein gleichseitiges Dreieck. Die Figur  $K_{n+1}$  entsteht aus  $K_n$ , indem man in jeder Begrenzungskante von  $K_n$  das mittlere Drittel durch die beiden Schenkel eines darauf aufgesetzten nach außen gerichteten gleichmäßigen Dreiecks ersetzt.



<sup>1</sup>Wohl aber die Summe.

Es sei  $A_n$  der Flächeninhalt und  $L_n$  die Länge des Randes der  $n$ -ten Kochschen Schneeflocke. Wir wollen zeigen, dass die Folge  $A_n$  konvergiert und die Folge  $L_n$  bestimmt gegen  $\infty$  divergiert.

Die Anzahl der Kanten von  $K_n$  ist  $3 \cdot 4^n$ , da bei jedem Unterteilungsschritt eine Kante durch vier Kanten ersetzt wird, deren Länge  $1/3$  der Länge der Vorgängerkante ist. Es sei  $r$  die Seitenlänge des gleichseitigen Ausgangsdreiecks. Dann besteht  $K_n$  aus  $3 \cdot 4^n$  Kanten der Länge  $r \left(\frac{1}{3}\right)^n$  und die Gesamtlänge der Kanten von  $K_n$  ist gleich

$$L_n = 3 \cdot 4^n r \left(\frac{1}{3}\right)^n = 3r \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Wegen  $\left(\frac{4}{3}\right) > 1$  divergiert dies gegen  $\infty$ .

Beim Übergang von  $K_n$  nach  $K_{n+1}$  kommt für jede Kante ein neues Dreieck mit gedrittelter Seitenlänge hinzu. Der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge  $s$  ist  $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$  (Grundseite mal Höhe durch 2). Im Schritt von  $K_n$  nach  $K_{n+1}$  kommen somit  $3 \cdot 4^n$  Dreiecke mit dem Flächeninhalt  $\frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^{2(n+1)} r^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}$  hinzu. Daher ist der Gesamtflächeninhalt von  $K_n$  gleich

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \left( 1 + 3 \frac{1}{9} + 12 \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 48 \left(\frac{1}{9}\right)^3 + \dots + 3 \cdot 4^{n-1} \left(\frac{1}{9}\right)^n \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} r^2 \left( 1 + \frac{3}{4} \left(\frac{4}{9}\right)^1 + \frac{3}{4} \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \frac{3}{4} \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \dots + \frac{3}{4} \left(\frac{4}{9}\right)^n \right). \end{aligned}$$

Wenn wir hinten die erste 1 und den Faktor  $\frac{3}{4}$  ignorieren, was die Konvergenzeigenschaft nicht ändert, so steht in der Klammer die Partialsumme einer geometrischen Reihe zu  $\frac{4}{9}$ , welche konvergiert.



## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Oresme-Nicole.jpg , Autor = Benutzer Leinad-Z auf Commons, Lizenz = PD	3
Quelle = Harmonischebrueckerp.jpg , Autor = Benutzer Anton auf de Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 2.5	4
Quelle = Geometric series 14 square.svg , Autor = Benutzer Melchoir auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	6
Quelle = KochFlake.svg , Autor = Benutzer Wxs auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	7