Prof. Dr. H. Brenner, Dr. L. Katthän **Osnabrück SS 2014**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 9

Übungsaufgaben

Aufgabe 9.1. Bestimme die freien Variablen in den folgenden Ausdrücken, wobei x, y, z Variablen seien und f ein einstelliges Funktionssymbol und R ein zweistelliges Relationssymbol sei.

(1) $\forall x\,(fx = y)$,
(2) $\forall x\,(fx = y) \wedge \exists z\,(fx = y)$,
(3) $\forall x \exists y Rxfy$,
(4) $(\forall x \exists y Rxfy) \rightarrow x = y$.

Aufgabe 9.2. Bestimme die kleinsten Symbolmengen, mit denen die folgenden Ausdrücke formulierbar sind.

(1) $\exists y\,(fx = y)$,
(2) $\forall x\,(fx = gyc) \wedge \exists z\,(Rzxy)$,
(3) $\forall x \exists y Sxhuy$.

Aufgabe 9.3. Es sei $\alpha \in L_0^S$ ein Satz einer erststufigen Sprache über einem Symbolalphabet S. Es sei eine S-Struktur mit Trägermenge M gegeben und I_1 und I_2 zwei auf M definierte S-Interpretationen. Zeige $I_1 \vDash \alpha$ genau dann, wenn $I_2 \vDash \alpha$ gilt.

Aufgabe 9.4. Es seien c, d Konstanten einer erststufigen Sprache, x, y, z, v Variablen, f ein einstelliges und g, h zweistellige Funktionssymbole. Bestimme die Substitution

$$ghhxcdfz \frac{fx, \quad gxz, \quad hvfx}{x, \quad y, \quad z}\,.$$

Aufgabe 9.5. Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Es seien $x_1, \ldots, x_k$ paarweise verschiedene Variablen und $t_1, \ldots, t_k$ fixierte S-Terme.

a) Interpretiere die Termsubstitution $\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}$ als Abbildung.

b) Interpretiere die Substitution von Ausdrücken $\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}$ als Abbildung.

Aufgabe 9.6. Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Zeige, dass die Substitution $\frac{x}{x}$ die Identität ist (und zwar für die Terme also auch für die Ausdrücke).

Aufgabe 9.7. Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben, es sei x eine Variable und t ein fixierter S-Term. Gehört die Symbolkette (!) $\alpha\frac{t}{x}$ zu L^S?

Aufgabe 9.8. Es sei c eine Konstante einer erststufigen Sprache, x, y, z, u Variablen, f ein einstelliges Funktionssymbol, g, h zweistellige Funktionssymbole und R ein zweistelliges Relationssymbol. Bestimme die Substitution

$$(\forall yRxy \wedge \neg Ryfz)\,\frac{fx, \quad gxz, \quad hcfx}{x, \quad\;\; y, \quad\;\; z}\,.$$

Aufgabe 9.9. Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Man gebe ein Beispiel für eine Substitution $\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}$ und einen S-Ausdruck α derart, dass die sukzessive substituierten Ausdrücke

$$\alpha\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}, \left(\alpha\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}\right)\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}, \left(\left(\alpha\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}\right)\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}\right)\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}, \ldots$$

immer länger werden.

Aufgabe 9.10. Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Es seien $x_1, \ldots, x_k$ paarweise verschiedene Variablen und $t_1, \ldots, t_k$ fixierte S-Terme. Zeige, dass für jeden S-Satz $\alpha \in L_0^S$ die Gleichheit

$$\alpha\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k} = \alpha$$

gilt.

Aufgabe 9.11. Es sei $\alpha \in L^S$. Zeige, dass die Gleichheit

$$\left(\alpha\frac{y}{x}\right)\frac{z}{y} = \alpha\frac{y,z}{x,y}$$

im Allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 9.12. Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Es seien $x_1, \ldots, x_k$ paarweise verschiedene Variablen und $t_1, \ldots, t_k$ fixierte S-Terme. Zeige, dass zu einem allgemeingültigen Ausdruck α auch die Substitution $\alpha\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}$ allgemeingültig ist. Gilt hiervon auch die Umkehrung?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 9.13. (5 Punkte)

Es seien u, x, y, z Variablen und f, g einstellige Funktionssymbole. Bestimme, welche der folgenden Ausdrücke untereinander äquivalent sind.

a)

(1) $\forall x \forall y((fx = fy \rightarrow x = y) \wedge (gx = gy \rightarrow x = y))$,
(2) $\forall x \forall y(fx = fy \rightarrow x = y) \wedge \forall x \forall y(gx = gy \rightarrow x = y)$,
(3) $\forall x \forall y \forall u \forall z((fx = fy \rightarrow x = y) \wedge (gu = gz \rightarrow u = z))$.

b)

(1) $\forall x \exists y(fy = x) \wedge \forall x \exists y(gy = x)$,
(2) $\forall x \exists y\,(fy = x \wedge gy = x)$,
(3) $\forall x \exists y \forall u \exists z(fy = x \wedge gz = u)$,
(4) $\forall x \forall u \exists y \exists z(fy = x \wedge gz = u)$.

Aufgabe 9.14. (2 Punkte)

Es sei α ein S-Ausdruck. Zeige, dass es einen S-Ausdruck β der Form $\beta = \alpha \wedge \gamma$ derart gibt, dass

$$\mathrm{Frei}\,(\beta) \;=\; \mathrm{Var}\,(\alpha) \;=\; \mathrm{Var}\,(\beta)$$

gilt.

Aufgabe 9.15. (3 Punkte)

Es sei f ein einstelliges Funktionssymbol. Bestimme, welche der folgenden Ausdrücke untereinander äquivalent[1] sind.

(1) $\forall x \exists y(fx = y)$,
(2) $\forall x \exists x(fx = x)$,
(3) $\exists x(fx = x)$.

[1] Zwei Ausdrücke α und β heißen äquivalent, wenn $\alpha \leftrightarrow \beta$ allgemeingültig ist.

Aufgabe 9.16. (3 Punkte)

Man gebe für jedes $r \in \mathbb{N}_+$ ein Beispiel für eine Substitution $\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}$ und einen S-Ausdruck α derart, dass die sukzessive substituierten Ausdrücke

$$\alpha\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}, \left(\alpha\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}\right)\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}, \left(\left(\alpha\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}\right)\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}\right)\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}, \ldots$$

eine Periode der Länge r besitzen.

Aufgabe 9.17. (3 Punkte)

Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Es seien $x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_\ell$ paarweise verschiedene Variablen und $t_1,\ldots,t_k,s_1,\ldots,s_\ell$ fixierte S-Terme. Zeige, dass für Terme τ, in denen $y_1,\ldots,y_\ell$ nicht vorkommen, die Gleichheit

$$\left(\tau\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}\right)\frac{s_1,\ldots,s_\ell}{y_1,\ldots,y_\ell} = \tau\frac{t_1\frac{s_1,\ldots,s_\ell}{y_1,\ldots,y_\ell},\ldots,t_k\frac{s_1,\ldots,s_\ell}{y_1,\ldots,y_\ell}}{x_1,\ldots,x_k}$$

gilt.

Aufgabe 9.18. (2 Punkte)

Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Es seien $x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_\ell$ paarweise verschiedene Variablen und $t_1,\ldots,t_k,s_1,\ldots,s_\ell$ fixierte S-Terme. Zeige durch ein Beispiel, dass für Terme τ die Gleichheit

$$\left(\tau\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}\right)\frac{s_1,\ldots,s_\ell}{y_1,\ldots,y_\ell} = \tau\frac{t_1\frac{s_1,\ldots,s_\ell}{y_1,\ldots,y_\ell},\ldots,t_k\frac{s_1,\ldots,s_\ell}{y_1,\ldots,y_\ell}}{x_1,\ldots,x_k}$$

nicht gelten muss.

Aufgabe 9.19. (4 Punkte)

Es sei ein Symbolalphabet S einer Sprache erster Stufe gegeben. Es seien $x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_\ell$ paarweise verschiedene Variablen und $t_1,\ldots,t_k,s_1,\ldots,s_\ell$ fixierte S-Terme. Zeige durch ein Beispiel, dass für Ausdrücke α die Gleichheit

$$\left(\alpha\frac{t_1,\ldots,t_k}{x_1,\ldots,x_k}\right)\frac{s_1,\ldots,s_\ell}{y_1,\ldots,y_\ell} \leftrightarrow \alpha\frac{t_1\frac{s_1,\ldots,s_\ell}{y_1,\ldots,y_\ell},\ldots,t_k\frac{s_1,\ldots,s_\ell}{y_1,\ldots,y_\ell}}{x_1,\ldots,x_k}$$

nicht gelten muss.