

## Mathematik I

### Vorlesung 7

#### Folgen in einem angeordneten Körper

Wir beginnen mit einem motivierenden Beispiel.

BEISPIEL 7.1. Wir wollen die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl „berechnen“, sagen wir von 5. Eine solche Zahl  $x$  mit der Eigenschaft  $x^2 = 5$  gibt es nicht innerhalb der rationalen Zahlen, wie aus der eindeutigen Primfaktorzerlegung folgt. In jedem angeordneten Körper  $K$  gibt es eine 5, ob es aber ein solches  $x$  gibt ist eine nichttriviale zusätzliche Eigenschaft von  $K$ . Wenn es in  $K$  eine solches  $x$  gibt, so hat auch  $-x$  diese Eigenschaft. Mehr als zwei Lösungen kann es aber nicht geben, siehe Aufgabe 7.2, so dass wir nur nach der positiven Lösung suchen müssen.

Obwohl es innerhalb der rationalen Zahlen keine Lösung für die Gleichung  $x^2 = 5$  gibt, so gibt es doch beliebig gute Approximationen innerhalb der rationalen Zahlen dafür. Beliebig gut heißt dabei, dass der Fehler (oder die Abweichung) unterhalb jede positive Schranke gedrückt werden kann. Das klassische Verfahren, um eine Quadratwurzeln beliebig anzunähern, ist das *Heron-Verfahren*, das man auch *babylonisches Wurzelziehen* nennt. Dies ist ein *iteratives Verfahren*, d.h. die nächste Approximation wird aus den vorausgehenden Approximationen berechnet. Beginnen wir mit  $a = x_0 = 2$  als erster Näherung. Wegen

$$x_0^2 = 2^2 = 4 < 5$$

ist  $x_0$  zu klein, d.h. es ist  $x_0 < x$ , wobei diese Ungleichung (zunächst) nur Sinn macht, wenn  $x$  in  $K$  existiert. Aus  $a^2 < 5$  (mit  $a$  positiv) folgt zunächst  $5/a^2 > 1$  und daraus  $(5/a)^2 > 5$ , d.h.  $5/a > \sqrt{5}$ . Man hat also die Abschätzungen

$$a < \sqrt{5} < 5/a,$$

wobei rechts eine rationale Zahl steht, wenn links eine rationale Zahl steht. Eine solche Abschätzung vermittelt offenbar eine quantitative Vorstellung darüber, wo  $\sqrt{5}$  liegt, und zwar unabhängig davon, ob  $\sqrt{5}$  zu  $K$  gehört oder nicht, solange nur  $a$  dazu gehört. Die Differenz  $5/a - a$  ist ein Maß für die Güte der Approximation.

Beim Startwert 2 ergibt sich, dass die Quadratwurzel von  $\sqrt{5}$  zwischen 2 und  $5/2$  liegt. Man nimmt das arithmetische Mittel der beiden Intervallgrenzen, also

$$x_1 = \frac{2 + \frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{4}.$$

Wegen  $(\frac{9}{4})^2 \frac{81}{16} > 5$  ist dieser Wert zu groß und daher liegt  $\sqrt{5}$  im Intervall  $[5 \cdot \frac{4}{9}, \frac{9}{4}]$ . Von diesen Intervallgrenzen nimmt man erneut das arithmetische Mittel und setzt

$$x_2 = \frac{5 \cdot \frac{4}{9} + \frac{9}{4}}{2} = \frac{161}{72}$$

als nächste Approximation. So fortfahrend erhält man eine immer besser werdende Approximation von  $\sqrt{5}$ .



Heron von Alexandria  
(1. Jahrhundert n.C.)

Allgemein ergibt sich das folgende Heron-Verfahren.

BEISPIEL 7.2. Beim *Heron-Verfahren* zur Berechnung von  $\sqrt{c}$  einer positiven Zahl  $c$  geht man iterativ wie folgt vor. Man startet mit einem beliebigen positiven Startwert  $x_0$  und berechnet davon das arithmetische Mittel aus  $x_0$  und  $c/x_0$ . Dieses Mittel nennt man  $x_1$ . Es gilt

$$x_1^2 - c = \left(\frac{x_0 + \frac{c}{x_0}}{2}\right)^2 - c = \frac{x_0^2 + 2c + \frac{c^2}{x_0^2}}{4} - c = \frac{x_0^2 - 2c + \frac{c^2}{x_0^2}}{4} = \left(\frac{x_0 - \frac{c}{x_0}}{2}\right)^2.$$

D.h. dass  $x_1$  mindestens so groß wie  $\sqrt{c}$  ist. Auf  $x_1$  wendet man iterativ das gleiche Verfahren an und erhält so  $x_2$  usw. Die Definition von  $x_{n+1}$  lautet also

$$x_{n+1} = \frac{x_n + c/x_n}{2}.$$

Nach Konstruktion weiß man, dass  $\sqrt{c}$  in jedem Intervall  $[c/x_n, x_n]$  (für  $n \geq 1$ ) liegt, da aus  $x_n^2 \geq c$  und  $x_n \cdot c/x_n = c$  folgt, dass  $(\frac{c}{x_n})^2 \leq c$  ist.

Das eben beschriebene Verfahren liefert also zu jeder natürlichen Zahl  $n$  ein Element in  $K$ , das eine durch eine gewisse algebraische Eigenschaft charakterisierte Zahl beliebig gut approximiert. Bei vielen technischen Anwendungen genügt es, gewisse Zahlen nur hinreichend genau zu kennen, wobei allerdings die benötigte Güte der Approximation von der technischen Zielsetzung abhängt. Es gibt im Allgemeinen keine Güte, die für jede vorstellbare Anwendung ausreicht, so dass es wichtig ist zu wissen, wie man eine gute Approximation durch eine bessere Approximation ersetzen kann und wie viele

Schritte man machen muss, um eine gewünschte Approximation zu erreichen. Dies führt zu den Begriffen Folge und Konvergenz.

DEFINITION 7.3. Sei  $K$  ein angeordneter Körper. Eine *Folge in  $K$*  ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow K, n \longmapsto x_n.$$

Eine Folge wird zumeist als  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , oder einfach nur kurz als  $(x_n)_n$  geschrieben. Manchmal sind Folgen nicht für alle natürlichen Zahlen definiert, sondern nur für alle natürlichen Zahlen  $\geq N$ . Alle Begriffe und Aussagen lassen sich dann sinngemäß auch auf diese Situation übertragen. Grundsätzlich gibt es Folgen in jeder Menge (nicht nur in einem angeordneten Körper), für die meisten Eigenschaften, für die man sich im Kontext von Folgen interessiert, braucht man aber eine zusätzliche topologische Struktur, wie sie in einem angeordneten Körper existiert. Dies gilt insbesondere für den folgenden Begriff.

DEFINITION 7.4. Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in einem angeordneten Körper und es sei  $x \in K$ . Man sagt, dass die Folge gegen  $x$  *konvergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem  $\epsilon \in K$ ,  $\epsilon > 0$ , gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$  derart, dass für alle  $n \geq n_0$  die Beziehung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

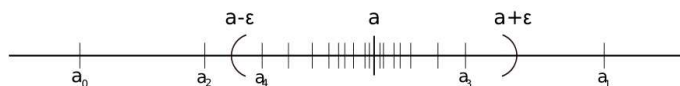
gilt. In diesem Fall heißt  $x$  der *Grenzwert* oder der *Limes* der Folge. Dafür schreibt man auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, so sagt man auch, dass sie *konvergiert* (ohne Bezug auf einen Grenzwert), andernfalls, dass sie *divergiert*.

Man sollte sich dabei das vorgegebene  $\epsilon$  als eine kleine, aber positive Zahl vorstellen, die eine gewünschte *Zielgenauigkeit* (oder erlaubten Fehler) ausdrückt. Die natürliche Zahl  $n_0$  ist dann die *Aufwandszahl*, die beschreibt, wie weit man gehen muss, um die gewünschte Zielgenauigkeit zu erreichen, und zwar stabil zu erreichen, dass alle folgenden Glieder innerhalb dieser Zielgenauigkeit bleiben. Konvergenz bedeutet demnach, dass man jede gewünschte Genauigkeit bei hinreichend großem Aufwand auch erreichen kann. Je kleiner die Zielgenauigkeit, also je besser die Approximation sein sollen, desto höher ist im Allgemeinen der Aufwand.

Zu einem  $\epsilon > 0$  und  $x \in K$  nennt man das Intervall  $]x - \epsilon, x + \epsilon[$  auch die  $\epsilon$ -*Umgebung* von  $x$ . Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*.



LEMMA 7.5. *Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $K$ . Dann besitzt  $x_n$  maximal einen Grenzwert.*

*Beweis.* Nehmen wir an, dass es zwei verschiedene Grenzwerte  $x, y$ ,  $x \neq y$ , gibt. Dann ist  $d = |x - y| > 0$ . Wir betrachten  $\epsilon = d/3 > 0$ . Wegen der Konvergenz gegen  $x$  gibt es ein  $n_0$  mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0$$

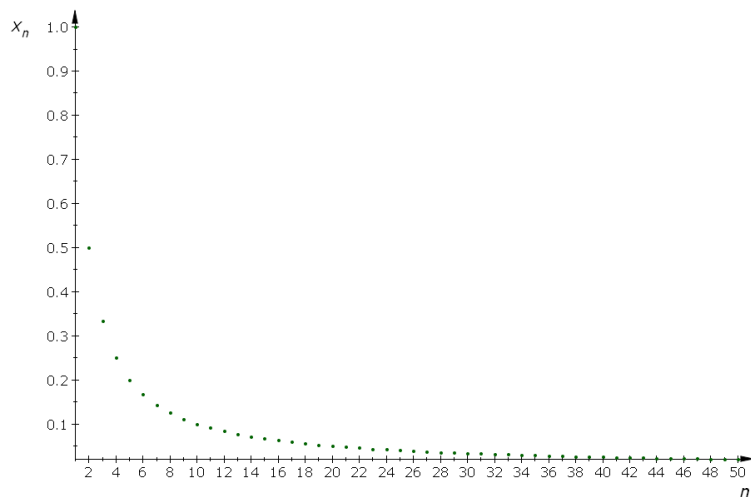
und wegen der Konvergenz gegen  $y$  gibt es ein  $n'_0$  mit

$$|x_n - y| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n'_0.$$

Beide Bedingungen gelten dann gleichermaßen für  $n \geq \max\{n_0, n'_0\}$ . Sei  $n$  mindestens so groß wie dieses Maximum. Dann ergibt sich aufgrund der Dreiecksungleichung der Widerspruch

$$d = |x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| \leq \epsilon + \epsilon = 2d/3.$$

□



BEISPIEL 7.6. Eine *konstante Folge*  $x_n = c$  ist stets konvergent mit dem Grenzwert  $c$ . Dies folgt direkt daraus, dass man für jedes  $\epsilon > 0$  als Aufwandszahl  $n_0 = 0$  nehmen kann. Es ist ja

$$|x_n - c| = |c - c| = |0| = 0 < \epsilon$$

für alle  $n$ .

Es sei nun  $K$  ein archimedisch angeordneter Körper. Dann ist die Folge

$$x_n = \frac{1}{n}$$

konvergent mit dem Grenzwert 0. Sei dazu ein beliebiges  $\epsilon \in K$ ,  $\epsilon > 0$ , vorgegeben. Aufgrund des Archimedes Axioms gibt es ein  $n_0$  mit  $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$ . Daraus folgt  $\frac{1}{n_0} \leq \epsilon$ . Insgesamt gilt damit für alle  $n \geq n_0$  die Abschätzung

$$x_n \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \epsilon .$$

### Beschränktheit

DEFINITION 7.7. Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und  $M \subseteq K$  eine Teilmenge.

- (1) Ein Element  $S \in K$  heißt eine *obere Schranke* für  $M$ , wenn  $x \leq S$  gilt für alle  $x \in M$ .
- (2) Ein Element  $s \in K$  heißt eine *untere Schranke* für  $M$ , wenn  $x \geq s$  gilt für alle  $x \in M$ .
- (3)  $M$  heißt *nach oben beschränkt*, wenn eine obere Schranke für  $M$  existiert.
- (4)  $M$  heißt *nach unten beschränkt*, wenn eine untere Schranke für  $M$  existiert.
- (5)  $M$  heißt *beschränkt*, wenn  $M$  sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.
- (6) Eine obere Schranke  $T$  von  $M$  heißt das *Supremum* von  $M$ , wenn  $T \leq S$  für alle oberen Schranken  $S$  von  $M$  gilt.
- (7) Eine untere Schranke  $t$  von  $M$  heißt das *Infimum* von  $M$ , wenn  $t \geq s$  für alle unteren Schranken  $s$  von  $M$  gilt.
- (8) Das Supremum  $T$  von  $M$  heißt *Maximum*, wenn  $T \in M$  ist.
- (9) Das Infimum  $t$  von  $M$  heißt *Minimum*, wenn  $t \in M$  ist.

Obere und untere Schranken muss es nicht geben. Wenn  $S$  eine obere Schranke ist, so ist auch jede größere Zahl eine obere Schranke. Für das offene Intervall  $]0, 1[$  ist 1 das Supremum, aber nicht das Maximum, da 1 nicht dazu gehört. Entsprechend ist 0 das Infimum, aber nicht das Minimum. Beim abgeschlossenen Intervall  $[0, 1]$  sind die beiden Grenzen Maximum und Minimum.

All diese Begriffe werden auch für Folgen angewendet, und zwar für die Bildmenge  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Für die Folge  $1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ , ist 1 das Maximum und das Supremum, 0 ist das Infimum, aber nicht das Minimum.

LEMMA 7.8. *Es sei  $K$  ein angeordneter Körper. Wenn eine Folge in  $K$  konvergent ist, so ist sie auch beschränkt.*

*Beweis.* Es sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die konvergente Folge mit dem Limes  $x \in K$  und es sei  $\epsilon$  ein beliebiges positives Element. Aufgrund der Konvergenz gibt es ein  $n_0$  derart, dass

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 .$$

Dann ist insbesondere

$$|x_n| \leq |x| + |x - x_n| \leq |x| + \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0 .$$

Unterhalb von  $n_0$  gibt es nur endlich viele Zahlen, so dass das Maximum

$$B = \max_{n < n_0} \{|x_n|, |x| + \epsilon\}$$

wohldefiniert ist. Dies ist eine Schranke für alle  $|x_n|$ . □

Es ist einfach, beschränkte, aber nicht konvergente Folgen anzugeben.

BEISPIEL 7.9. Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und sei  $c \in K$ ,  $c \neq 0$ . Dann ist die *alternierende Folge*

$$x_n = (-1)^n c$$

beschränkt, aber nicht konvergent. Die Beschränktheit folgt direkt aus

$$|x_n| = |(-1)^n| |c| = |c|.$$

Konvergenz liegt aber nicht vor. Wäre nämlich  $x \geq 0$  der Grenzwert. Dann gilt für positives  $\epsilon < |c|$  und jedes ungerade  $n$  die Beziehung

$$|x_n - x| = |c + x| \geq c > \epsilon,$$

so dass es Folgenwerte außerhalb dieser  $\epsilon$ -Umgebung gibt. Analog kann man einen negativ angenommen Grenzwert zum Widerspruch führen.

### Rechenregeln für Folgen

LEMMA 7.10. *Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und es seien  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergente Folgen in  $K$ . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Die Folge  $(x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) + \left( \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

- (2) *Die Folge  $(x_n \cdot y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) \cdot \left( \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

- (3) *Für  $c \in K$  gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c x_n = c \left( \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right).$$

- (4) *Es sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \neq 0$  und  $x_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(\frac{1}{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$  ebenfalls konvergent mit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}.$$

- (5) *Es sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \neq 0$  und  $x_n \neq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $(\frac{y_n}{x_n})_{n \in \mathbb{N}}$  ebenfalls konvergent mit*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}{x}.$$

*Beweis.* (2). Sei  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Die Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist insbesondere beschränkt und daher existiert ein  $D$  mit  $|x_n| \leq D$ . Sei  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  und  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ . Wir setzen  $C = \max\{D, |y|\}$ . Daher gibt es natürliche Zahlen  $N_1$  und  $N_2$  mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_1 \text{ und } |y_n - y| \leq \frac{\epsilon}{2C} \text{ für } n \geq N_2.$$

Diese Abschätzungen gelten dann auch für  $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$ . Für diese Zahlen gilt daher

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &\leq |x_n y_n - x_n y| + |x_n y - xy| \\ &= |x_n| |y_n - y| + |y| |x_n - x| \\ &\leq C \frac{\epsilon}{2C} + C \frac{\epsilon}{2C} \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

(4). Da der Limes der Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nicht null ist, gilt für  $n \geq N_1$  die Bedingung  $|x_n| \geq \frac{|x|}{2}$  und damit  $\frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|x|}$ . Sei  $\epsilon > 0$  vorgegeben. Wegen der Konvergenz von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gibt es ein  $N_2$  mit

$$|x_n - x| \leq \frac{\epsilon |x|^2}{2} \text{ für alle } n \geq N_2.$$

Dann gilt für alle  $n \geq N = \max\{N_1, N_2\}$  die Abschätzung

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{x_n - x}{x x_n} \right| = \frac{1}{|x| |x_n|} |x_n - x| \leq \frac{2}{|x|^2} \cdot \frac{2|x|^2}{2} \epsilon.$$

□

LEMMA 7.11. *Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und es seien  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei konvergente Folgen mit  $x_n \geq y_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Dann ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 7.9. □

LEMMA 7.12. (*Quetschkriterium*)

*Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und es seien  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  drei Folgen in  $K$ . Es gelte*

$$x_n \leq y_n \leq z_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

*und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert  $a$ . Dann konvergiert auch  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen diesen Grenzwert  $a$ .*

*Beweis.* Siehe Aufgabe 7.10. □

DEFINITION 7.13. Es sei  $K$  ein angeordneter Körper und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $K$ . Dann heißt die Folge *wachsend*, wenn  $x_{n+1} \geq x_n$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und *streng wachsend*, wenn  $x_{n+1} > x_n$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Die Folge heißt *fallend*, wenn  $x_{n+1} \leq x_n$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$ , und *streng fallend*, wenn  $x_{n+1} < x_n$  ist für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

Als gemeinsamen Begriff für wachsende oder fallende Folgen verwendet man die Bezeichnung *monotone Folgen*.

Man stelle sich nun eine wachsende Folge vor, die aber dennoch beschränkt ist. Muss eine solche Folge konvergieren? Das hängt vom angeordneten Körper ab! Innerhalb der rationalen Zahlen sind bspw. die mit dem Heronverfahren konstruierten Folgen monoton wachsend (wenn man mit einem zu kleinen Startwert anfängt) und auch beschränkt (durch jede rationale Zahl, deren Quadrat größer als  $a$  ist), sie besitzen aber im Allgemeinen keinen Limes in  $\mathbb{Q}$ . Die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ , denen wir uns in der nächsten Vorlesung zuwenden, sind gerade dadurch ausgezeichnet, dass darin jede wachsende, nach oben beschränkte Folge einen Grenzwert besitzt.



## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Heron von Alexandria.jpg, Autor = Benutzer Frank C. Müller auf Commons, Lizenz = PD	2
Quelle = Konvergenz.svg, Autor = Benutzer Matthias Vogelgesang auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	3
Quelle = Cauchy sequence - example.png, Autor = Benutzer Pred auf da.wikipedia, Lizenz =	4