

Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

26. März 2014

Analysis I
Klausur- Lösungen

AUFGABE 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

- (1) Eine *surjektive* Abbildung

$$f: L \longrightarrow M.$$

- (2) Ein *archimedisch* angeordneter Körper K .
 (3) Ein *vollständig* angeordneter Körper K .
 (4) Der *Grenzwert* einer Funktion

$$f: T \longrightarrow \mathbb{K}$$

in einem Punkt $a \in \mathbb{K}$ (dabei ist $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge).

- (5) Der *Konvergenzradius* einer komplexen Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n.$$

- (6) Die *n-fache Differenzierbarkeit* einer Funktion

$$f: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}.$$

- (7) Das *Taylor-Polynom vom Grad n* zu einer n -mal differenzierbaren Funktion

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

im Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$.

- (8) Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion

$$f: I \longrightarrow \mathbb{R}$$

auf einem kompakten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Lösung

- (1) f heißt surjektiv, wenn es für jedes $y \in M$ mindestens ein Element $x \in L$ mit $f(x) = y$ gibt.
 (2) Ein angeordneter Körper K heißt archimedisch angeordnet, wenn es zu jedem $x \in K$ eine natürliche Zahl n mit

$$n \geq x$$

gibt.

- (3) Ein angeordneter Körper K heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in K konvergiert.
 (4) Eine Zahl $b \in \mathbb{K}$ heißt Grenzwert von f in a , wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in T , die gegen a konvergiert, die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen b konvergiert.
 (5) Unter dem Konvergenzradius der Potenzreihe versteht man

$$\sup (|b - a|, b \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} c_n(b - a)^n \text{ konvergiert}).$$

(6) Man sagt, dass f n -mal *differenzierbar* ist, wenn f $(n - 1)$ -mal differenzierbar ist und die $(n - 1)$ -te Ableitung $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist.

(7) Das Polynom

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

heißt das *Taylor-Polynom vom Grad n* zu f im Entwicklungspunkt a .

(8) Die Funktion f heißt Riemann-integrierbar auf I , wenn Ober- und Unterintegral von f existieren und übereinstimmen.

AUFGABE 2. Formuliere die folgenden Sätze.

- (1) Das *Quotientenkriterium* für eine komplexe Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.
- (2) Der *Satz über die stetige Fortsetzbarkeit* einer Funktion

$$T \longrightarrow \mathbb{K},$$

wobei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge ist.

- (3) Der *Mittelwertsatz der Differentialrechnung*.
- (4) Die *Formel für die Stammfunktion der Umkehrfunktion*.

Lösung

- (1) Es gebe eine reelle Zahl q mit $0 \leq q < 1$ und ein k_0 mit

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leq q$$

für alle $k \geq k_0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.

- (2) Es sei \bar{T} die Menge aller Berührungspunkte von T und

$$f: T \longrightarrow \mathbb{K}$$

sei gleichmäßig stetig. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung

$$\tilde{f}: \bar{T} \longrightarrow \mathbb{K}.$$

- (3) Sei $a < b$ und sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige, auf $]a, b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $c \in]a, b[$ mit

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

- (4) Es sei $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ eine bijektive differenzierbare Funktion und es sei F eine Stammfunktion von f . Dann ist

$$G(y) := yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y))$$

eine Stammfunktion der Umkehrfunktion f^{-1} .

AUFGABE 3. Ordne die Zahlen

$$\exp(0,6), \exp(0,7) \text{ und } 2$$

gemäß ihrer Größe.

Lösung

Es ist einerseits

$$\begin{aligned} \exp(0,7) &\geq 1 + 0,7 + \frac{1}{2} \cdot 0,7^2 + \frac{1}{6} \cdot 0,7^3 \\ &= 1,7 + 0,245 + \frac{1}{6} \cdot 0,343 \\ &> 1,945 + 0,057 \\ &= 2,002 \\ &> 2. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} \exp(0,6) &\leq 1 + 0,6 + \frac{1}{2} \cdot 0,6^2 + \frac{1}{6} (0,6^3 + 0,6^4 + \dots) \\ &= 1,6 + 0,18 + \frac{1}{6} \cdot 0,6^3 (1 + 0,6 + 0,6^2 + \dots) \\ &= 1,78 + \frac{1}{6} \cdot 0,6^3 \cdot \frac{5}{2} \\ &= 1,78 + \frac{3^3 \cdot 5}{6 \cdot 5^3 \cdot 2} \\ &= 1,78 + \frac{9}{100} \\ &= 1,87 \\ &< 2, \end{aligned}$$

wobei wir im dritten Schritt die geometrische Reihe verwendet haben. Daher ist

$$\exp(0,6) < 2 < \exp(0,7).$$

AUFGABE 4. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ drei Folgen in K . Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a . Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

Lösung

Es ist

$$x_n - a \leq y_n - a \leq z_n - a.$$

Bei $y_n - a \geq 0$ ist somit

$$|y_n - a| \leq |z_n - a|$$

und bei $y_n - a \leq 0$ ist

$$|y_n - a| \leq |x_n - a|.$$

Daher ist stets

$$|y_n - a| \leq \min(|x_n - a|, |z_n - a|).$$

Für ein vorgegebenes $\epsilon > 0$ gibt es aufgrund der Konvergenz der beiden äußeren Folgen gegen a natürliche Zahlen n_1 und n_2 derart, dass

$$|x_n - a| \leq \epsilon$$

für $n \geq n_1$ und

$$|z_n - a| \leq \epsilon$$

für $n \geq n_2$ gilt. Für $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$ gilt daher

$$|y_n - a| \leq \epsilon.$$

Dies bedeutet die Konvergenz von y_n gegen a .

AUFGABE 5. Entscheide, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

konvergiert.

Lösung

Für $n \geq 2$ ist

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n^{n-2}} \cdot \frac{2 \cdot 1}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, liegt eine konvergente Majorante vor und damit konvergiert die angegebene Reihe.

AUFGABE 6. Sei $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Es sei

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto f(z),$$

eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass die Gleichheit $f(az) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gelte. Zeige, dass f konstant ist.

Lösung

Unter der gegebenen Voraussetzung konvergiert die Folge a^n gegen 0. Daher konvergiert auch für jedes feste $z \in \mathbb{C}$ die Folge $a^n z$ gegen 0. Durch iterative Anwendung der Voraussetzung an f erhält man

$$f(z) = f(az) = f(a^2z) = \dots = f(a^n z)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Stetigkeit von f ist also

$$f(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(a^n z) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a^n z\right) = f(0).$$

Somit ist $f(0)$ der einzige Wert der Funktion.

AUFGABE 7. Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, x \longmapsto f(x) = 2xe^{3x}.$$

Zeige durch Induktion, dass die n -te Ableitung ($n \geq 1$) von f gleich

$$f^{(n)}(x) = (3^n \cdot 2x + 3^{n-1} \cdot 2n) e^{3x}$$

ist.

Lösung

Die Ableitung von f ist nach der Produktregel

$$f'(x) = 2e^{3x} + 2x \cdot 3e^{3x} = (3^1 \cdot 2x + 2) e^{3x} = (3^1 \cdot 2x + 3^0 \cdot 2 \cdot 1) e^{3x}.$$

Dadurch ist die Gleichung für $n = 1$ richtig und der Induktionsanfang ist gesichert. Sei die Gleichung nun für die n -te Ableitung schon bewiesen. Wegen $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ gilt somit

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= ((3^n \cdot 2x + 3^{n-1} \cdot 2n) e^{3x})' \\ &= 3^n \cdot 2e^{3x} + 3(3^n \cdot 2x + 3^{n-1} \cdot 2n) e^{3x} \\ &= (3^{n+1} \cdot 2x + 3^n \cdot 2 + 3^n \cdot 2n) e^{3x} \\ &= (3^{n+1} \cdot 2x + 3^n \cdot 2(n+1)) e^{3x}. \end{aligned}$$

Daher ist die Gleichung auch für die $(n+1)$ -te Ableitung richtig.

AUFGABE 8. Es sei ein Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius r und ein $s > r$ gegeben. Für welches $x \in \mathbb{R}$ verläuft die Tangente zu x an den oberen Kreisbogen durch den Punkt $(s, 0)$?

Lösung

Der obere Kreisbogen wird (für $x \in [-r, r]$) durch die Funktion

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

beschrieben. Die Ableitung davon ist

$$f'(x) = -x \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Die Steigung der Geraden durch $(x, f(x))$ und $(s, 0)$ wird durch

$$\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{x - s}$$

beschrieben. Dies führt auf die Bedingung

$$-x \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{x - s}$$

bzw. auf

$$-x(x - s) = r^2 - x^2.$$

Daher ist

$$x = \frac{r^2}{s}.$$

AUFGABE 9. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln x}.$$

Lösung

Wir verwenden die Regel von Hospital. Die Ableitung der Zählerfunktion ist

$$(x - 1)' = 1$$

und die Ableitung der Nennerfunktion ist

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Die Funktion $\frac{1}{x}$ hat keine Nullstelle in einer offenen Umgebung von 1. Daher ist Hospital anwendbar und es ist

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{1}} = 1.$$

AUFGABE 10. Wir betrachten die durch

$$x_n = \sqrt[n]{n}$$

definierte Folge ($n \geq 1$). Zeige folgende Aussagen.

- (1) Für $n \geq 3$ ist die Folge monoton fallend.
- (2) Die Folge konvergiert gegen 1.

Lösung

Wir schreiben

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{n} &= n^{\frac{1}{n}} \\ &= (e^{\ln n})^{\frac{1}{n}} \\ &= e^{\frac{\ln n}{n}}. \end{aligned}$$

1. Wir erlauben auch reelle Argumente, d.h. wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto e^{\frac{\ln x}{x}},$$

und zeigen, dass diese Funktion für $x \geq 3$ fallend ist; dies gilt dann insbesondere für die natürlichen Zahlen $n \geq 3$. Da die Exponentialfunktion monoton wachsend ist, genügt es zu zeigen, dass

$$g: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{\ln x}{x},$$

für $x \geq 3$ fallend ist. Dazu ziehen wir Satz 19.5 heran und betrachten die Ableitung der differenzierbaren Funktion g . Diese ist

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \\ &= \frac{1 - \ln x}{x^2}. \end{aligned}$$

Für $x \geq 3 > e$ ist $\ln x \geq 1$ und somit ist der Zähler negativ, also ist die Funktion negativ.

2. Wir zeigen, dass $\frac{\ln n}{n}$ für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Wegen der Monotonie aus Teil 1 kann man statt n auch e^k einsetzen, was zur Folge $\frac{k}{e^k}$ führt. Für diese Folge gilt

$$\begin{aligned} \frac{k}{e^k} &\leq \frac{k}{1 + k + \frac{1}{2}k^2} \\ &= \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k} + \frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ihr Grenzwert ist nach dem Quetschkriterium also 0. Da die Exponentialfunktion stetig ist, konvergiert somit $e^{\frac{\ln n}{n}}$ gegen $e^0 = 1$.

AUFGABE 11. Der Graph der Funktion

$$f(x) = -x^2 + 5x$$

und die x -Achse begrenzen eine Fläche. Bestimme die Gerade durch den Nullpunkt, die diese Fläche in zwei gleich große Teile unterteilt.

Lösung

Es ist

$$-x^2 + 5x = -x(x - 5),$$

die Fläche befindet sich also oberhalb des Intervalls $[0, 5]$. Eine Stammfunktion von f ist

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2$$

und somit ist

$$\begin{aligned} \int_0^5 f(x) dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_0^5 \\ &= -\frac{1}{3}125 + \frac{5}{2}25 \\ &= \frac{125}{6}. \end{aligned}$$

Die Gerade durch den Nullpunkt setzen wir als $y = ax$ an. Der Durchstoßungspunkt (abgesehen vom Nullpunkt) mit dem Graphen ergibt sich aus

$$ax = -x^2 + 5x$$

zu

$$x = 5 - a.$$

Die obere Fläche besitzt den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} \int_0^{5-a} -x^2 + 5x - ax dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5-a}{2}x^2\right]_0^{5-a} \\ &= (5-a)^3 \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \\ &= (5-a)^3 \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Die Bedingung

$$(5-a)^3 \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{125}{6}$$

führt auf

$$(5-a)^3 = \frac{125}{2}$$

und damit auf

$$5-a = \sqrt[3]{\frac{125}{2}}.$$

14

Also ist

$$a = 5 \left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \right).$$

AUFGABE 12. Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{5x^3 + 4x - 3}{x^2 + 1}$$

mittels Partialbruchzerlegung.

Lösung

Da der Grad des Zählerpolynoms größer als der Grad des Nennerpolynoms ist, führen wir zuerst eine Polynomdivision durch. Diese ergibt

$$5x^3 + 4x - 3 = (x^2 + 1)(5x) - x - 3$$

und daher ist

$$\frac{5x^3 + 4x - 3}{x^2 + 1} = 5x - \frac{x}{x^2 + 1} - 3\frac{1}{x^2 + 1}.$$

Eine Stammfunktion ist also

$$\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) - 3 \arctan x.$$

AUFGABE 13. Sei I ein reelles Intervall und sei

$$f: I \rightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $a \in I$ und es sei

$$F(x) := \int_a^x f(t) dt$$

die zugehörige Integralfunktion. Zeige, dass dann F differenzierbar ist und dass

$$F'(x) = f(x)$$

für alle $x \in I$ gilt.

Lösung

Es sei x fixiert. Der Differenzenquotient ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Wir müssen zeigen, dass für $h \rightarrow 0$ der Limes existiert und gleich $f(x)$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass der Limes von

$$\frac{1}{h} \left(\int_x^{x+h} f(t) dt - hf(x) \right)$$

für $h \rightarrow 0$ gleich 0 ist. Mit der durch $f(x)$ gegebenen konstanten Funktion können wir $hf(x) = \int_x^{x+h} f(x) dt$ schreiben und damit den Ausdruck

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt$$

betrachten. Indem wir die Funktion $f(t) - f(x)$ betrachten, können wir annehmen, dass $f(x) = 0$ ist. Wegen der Stetigkeit von f gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $t \in [x - \delta, x + \delta]$ die Abschätzung $|f(t)| \leq \epsilon$ gilt. Damit gilt für $h \in [-\delta, +\delta]$ nach Lemma 23.15 die Abschätzung

$$\left| \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq \left| \int_x^{x+h} |f(t)| dt \right| \leq \left| \int_x^{x+h} \epsilon dt \right| = |h| \epsilon$$

und daher

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \right| \leq \epsilon.$$

AUFGABE 14. Sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für jede stetige Funktion $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Zeige $f = 0$.

Lösung

Nehmen wir an, dass f nicht die Nullfunktion ist. Dann gibt es einen Punkt $c \in [a, b]$ mit $f(c) \neq 0$. Sagen wir $f(c) > 0$. Da f stetig ist, gibt es ein Teilintervall $J = [d, e] \subseteq [a, b]$ mit $f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$ für alle $x \in J$. Die Funktion g sei außerhalb von J die Nullfunktion und auf J durch

$$g(x) = -(x - d)(x - e)$$

definiert. Die Funktion g ist stetig auf $[a, b]$ und im Innern von $[d, e]$ positiv. Daher gibt es ein weiteres Teilintervall $J' = [s, t] \subseteq J$ derart, dass $g(x) \geq \frac{g(\frac{c+d}{2})}{2}$ für alle $x \in J'$ ist. Daher ist

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_c^d f(x)g(x)dx \\ &\geq \int_s^t f(x)g(x)dx \\ &\geq (t - s) \frac{f(c)}{2} \frac{g(\frac{c+d}{2})}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

AUFGABE 15. Finde eine Lösung für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{t}{t^2 - 1} y^2$$

mit $t > 1$ und $y < 0$.

Lösung

Es liegt eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen vor. Wir setzen

$$h(y) = \frac{1}{y^2},$$

davon ist

$$H(y) = -y^{-1}$$

eine Stammfunktion. Die Umkehrfunktion davon ist ebenfalls

$$H^{-1}(u) = -u^{-1}.$$

Wir setzen weiter $g(t) = \frac{t}{t^2-1}$. Wir machen den Ansatz für die Partialbruchzerlegung, also

$$\frac{t}{t^2 - 1} = \frac{a}{t - 1} + \frac{b}{t + 1}.$$

Daraus ergibt sich die Bedingung

$$t = a(t + 1) + b(t - 1)$$

und daraus

$$a = b = \frac{1}{2}.$$

Also ist

$$G(t) = \frac{1}{2} \ln(t + 1) + \frac{1}{2} \ln(t - 1)$$

eine Stammfunktion von $g(t)$. Daher ist

$$y(t) = \frac{-2}{\ln(t - 1) + \ln(t + 1)}$$

eine Lösung, die für $t > 1$ definiert ist und für die $y(t) < 0$ gilt.