Fachbereich Mathematik/Informatik
Prof. Dr. H. Brenner

Analysis I

7. Beispielklausur mit Lösungen

Aufgabe 1. Definiere die folgenden (kursiv gedruckten) Begriffe.

(1) Eine *surjektive* Abbildung
$$f\colon L \longrightarrow M.$$
(2) Ein *archimedisch* angeordneter Körper K.
(3) Ein *vollständig* angeordneter Körper K.
(4) Der *Grenzwert* einer Funktion
$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$
in einem Punkt $a \in \mathbb{K}$ (dabei ist $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge).
(5) Der *Konvergenzradius* einer komplexen Potenzreihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n .$$
(6) Die n-fache *Differenzierbarkeit* einer Funktion
$$f\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}.$$
(7) Das *Taylor-Polynom vom Grad n* zu einer n-mal differenzierbaren Funktion
$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
im Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$.
(8) Die *Riemann-Integrierbarkeit* einer Funktion
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
auf einem kompakten Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Lösung

(1) f heißt surjektiv, wenn es für jedes $y \in M$ mindestens ein Element $x \in L$ mit $f(x) = y$ gibt.
(2) Ein angeordneter Körper K heißt archimedisch angeordnet, wenn es zu jedem $x \in K$ eine natürliche Zahl n mit
$$n \geq x$$
gibt.

(3) Ein angeordneter Körper K heißt vollständig, wenn jede Cauchy-Folge in K konvergiert.
(4) Eine Zahl $b \in \mathbb{K}$ heißt Grenzwert von f in a, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in T, die gegen a konvergiert, die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b konvergiert.
(5) Unter dem Konvergenzradius der Potenzreihe versteht man

$$\sup\left(|b-a|\,, b \in \mathbb{C}, \sum_{n=0}^{\infty} c_n(b-a)^n \text{ konvergiert}\right).$$

(6) Man sagt, dass f n-mal *differenzierbar* ist, wenn f $(n-1)$-mal differenzierbar ist und die $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}$ differenzierbar ist.
(7) Das Polynom

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

heißt das *Taylor-Polynom vom Grad* n zu f im Entwicklungspunkt a.
(8) Die Funktion f heißt Riemann-integrierbar auf I, wenn Ober- und Unterintegral von f existieren und übereinstimmen.

Aufgabe 2. Formuliere die folgenden Sätze.

(1) Das *Quotientenkriterium* für eine komplexe Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$.
(2) Der *Satz über die stetige Fortsetzbarkeit* einer Funktion

$$T \longrightarrow \mathbb{K},$$

wobei $T \subseteq \mathbb{K}$ eine Teilmenge ist.
(3) Der *Mittelwertsatz der Differentialrechnung.*
(4) Die *Formel für die Stammfunktion der Umkehrfunktion.*

Lösung

(1) Es gebe eine reelle Zahl q mit $0 \leq q < 1$ und ein k_0 mit

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$$

für alle $k \geq k_0$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ absolut.
(2) Es sei $\overline{T}$ die Menge aller Berührpunkte von T und

$$f\colon T \longrightarrow \mathbb{K}$$

sei gleichmäßig stetig. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung

$$\tilde{f}\colon \overline{T} \longrightarrow \mathbb{K}.$$

(3) Sei $a < b$ und sei
$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetige, auf $]a,b[$ differenzierbare Funktion. Dann gibt es ein $c \in]a,b[$ mit
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

(4) Es sei $f\colon [a,b] \to [c,d]$ eine bijektive differenzierbare Funktion und es sei F eine Stammfunktion von f. Dann ist
$$G(y) := yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y))$$
eine Stammfunktion der Umkehrfunktion f^{-1}.

Aufgabe 3. Ordne die Zahlen
$$\exp(0,6)\,,\ \exp(0,7) \text{ und } 2$$
gemäß ihrer Größe.

Lösung

Es ist einerseits
$$\begin{aligned}\exp(0,7) &\geq 1+0,7+\frac{1}{2}\cdot 0,7^2+\frac{1}{6}\cdot 0,7^3\\ &= 1,7+0,245+\frac{1}{6}\cdot 0,343\\ &> 1,945+0,057\\ &= 2,002\\ &> 2.\end{aligned}$$
Andererseits ist
$$\begin{aligned}\exp(0,6) &\leq 1+0,6+\frac{1}{2}\cdot 0,6^2+\frac{1}{6}\left(0,6^3+0,6^4+\cdots\right)\\ &= 1,6+0,18+\frac{1}{6}\cdot 0,6^3\left(1+0,6+0,6^2+\cdots\right)\\ &= 1,78+\frac{1}{6}\cdot 0,6^3\cdot\frac{5}{2}\\ &= 1,78+\frac{3^3\cdot 5}{6\cdot 5^3\cdot 2}\\ &= 1,78+\frac{9}{100}\\ &= 1,87\\ &< 2,\end{aligned}$$
wobei wir im dritten Schritt die geometrische Reihe verwendet haben. Daher ist
$$\exp(0,6) < 2 < \exp(0,7)\,.$$

Aufgabe 4. Es sei K ein angeordneter Körper und es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei Folgen in K. Es gelte $x_n \leq y_n \leq z_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beide gegen den gleichen Grenzwert a. Zeige, dass dann auch $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen diesen Grenzwert a konvergiert.

Lösung

Es ist

$$x_n - a \leq y_n - a \leq z_n - a.$$

Bei $y_n - a \geq 0$ ist somit

$$|y_n - a| \leq |z_n - a|$$

und bei $y_n - a \leq 0$ ist

$$|y_n - a| \leq |x_n - a|.$$

Daher ist stets

$$|y_n - a| \leq \min(|x_n - a|, |z_n - a|).$$

Für ein vorgegebenes $\epsilon > 0$ gibt es aufgrund der Konvergenz der beiden äußeren Folgen gegen a natürliche Zahlen n_1 und n_2 derart, dass

$$|x_n - a| \leq \epsilon$$

für $n \geq n_1$ und

$$|z_n - a| \leq \epsilon$$

für $n \geq n_2$ gilt. Für $n \geq n_0 = \max(n_1, n_2)$ gilt daher

$$|y_n - a| \leq \epsilon.$$

Dies bedeutet die Konvergenz von y_n gegen a.

Aufgabe 5. Entscheide, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

konvergiert.

Lösung

Für $n \geq 2$ ist

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)\cdots 3}{n^{n-2}} \cdot \frac{2\cdot 1}{n^2} \leq \frac{2}{n^2}.$$

Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert, liegt eine konvergente Majorante vor und damit konvergiert die angegebene Reihe.

Aufgabe 6. Sei $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$. Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto f(z),$$

eine stetige Funktion mit der Eigenschaft, dass die Gleichheit $f(az) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gelte. Zeige, dass f konstant ist.

Lösung

Unter der gegebenen Voraussetzung konvergiert die Folge a^n gegen 0. Daher konvergiert auch für jedes feste $z \in \mathbb{C}$ die Folge $a^n z$ gegen 0. Durch iterative Anwendung der Voraussetzung an f erhält man

$$f(z) = f(az) = f(a^2 z) = \ldots = f(a^n z)$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Stetigkeit von f ist also

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f(a^n z) = f(\lim_{n\to\infty} a^n z) = f(0).$$

Somit ist $f(0)$ der einzige Wert der Funktion.

Aufgabe 7. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, x \longmapsto f(x) = 2xe^{3x}.$$

Zeige durch Induktion, dass die n-te Ableitung ($n \geq 1$) von f gleich

$$f^{(n)}(x) = \left(3^n \cdot 2x + 3^{n-1} \cdot 2n\right) e^{3x}$$

ist.

Lösung

Die Ableitung von f ist nach der Produktregel

$$f'(x) = 2e^{3x} + 2x \cdot 3e^{3x} = \left(3^1 \cdot 2x + 2\right) e^{3x} = \left(3^1 \cdot 2x + 3^0 \cdot 2 \cdot 1\right) e^{3x}.$$

Dadurch ist die Gleichung für $n = 1$ richtig und der Induktionsanfang ist gesichert. Sei die Gleichung nun für die n-te Ableitung schon bewiesen. Wegen $f^{(n+1)} = (f^n)'$ gilt somit

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= \left(\left(3^n \cdot 2x + 3^{n-1} \cdot 2n\right) e^{3x}\right)' \\ &= 3^n \cdot 2e^{3x} + 3\left(3^n \cdot 2x + 3^{n-1} \cdot 2n\right) e^{3x} \\ &= \left(3^{n+1} \cdot 2x + 3^n \cdot 2 + 3^n \cdot 2n\right) e^{3x} \\ &= \left(3^{n+1} \cdot 2x + 3^n \cdot 2(n+1)\right) e^{3x}. \end{aligned}$$

Daher ist die Gleichung auch für die $(n+1)$-te Ableitung richtig.

Aufgabe 8. Es sei ein Kreis mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius r und ein $s > r$ gegeben. Für welches $x \in \mathbb{R}$ verläuft die Tangente zu x an den oberen Kreisbogen durch den Punkt $(s, 0)$?

Lösung

Der obere Kreisbogen wird (für $x \in [-r, r]$) durch die Funktion

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

beschrieben. Die Ableitung davon ist

$$f'(x) = -x\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Die Steigung der Geraden durch $(x, f(x))$ und $(s, 0)$ wird durch

$$\frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{x - s}$$

beschrieben. Dies führt auf die Bedingung

$$-x\frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{x - s}$$

bzw. auf

$$-x(x - s) = r^2 - x^2.$$

Daher ist

$$x = \frac{r^2}{s}.$$

Aufgabe 9. Bestimme den Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\ln x}.$$

Lösung

Wir verwenden die Regel von Hospital. Die Ableitung der Zählerfunktion ist

$$(x - 1)' = 1$$

und die Ableitung der Nennerfunktion ist

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Die Funktion $\frac{1}{x}$ hat keine Nullstelle in einer offenen Ungebung von 1. Daher ist Hospital anwendbar und es ist

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{1}} = 1.$$

Aufgabe 10. Wir betrachten die durch

$$x_n = \sqrt[n]{n}$$

definierte Folge ($n \geq 1$). Zeige folgende Aussagen.

(1) Für $n \geq 3$ ist die Folge monoton fallend.
(2) Die Folge konvergiert gegen 1.

Lösung

Wir schreiben

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{n} &= n^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(e^{\ln n}\right)^{\frac{1}{n}} \\ &= e^{\frac{\ln n}{n}}.\end{aligned}$$

1. Wir erlauben auch reelle Argumente, d.h. wir betrachten die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto e^{\frac{\ln x}{x}},$$

und zeigen, dass diese Funktion für $x \geq 3$ fallend ist; dies gilt dann insbesondere für die natürlichen Zahlen $n \geq 3$. Da die Exponentialfunktion monoton wachsend ist, genügt es zu zeigen, dass

$$g\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \frac{\ln x}{x},$$

für $x \geq 3$ fallend ist. Dazu ziehen wir Satz 19.5 heran und betrachten die Ableitung der differenzierbaren Funktion g. Diese ist

$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2} \\ &= \frac{1-\ln x}{x^2}.\end{aligned}$$

Für $x \geq 3 > e$ ist $\ln x \geq 1$ und somit ist der Zähler negativ, also ist die Funktion negativ.

2. Wir zeigen, dass $\frac{\ln n}{n}$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Wegen der Monotonie aus Teil 1 kann man statt n auch e^k einsetzen, was zur Folge $\frac{k}{e^k}$ führt. Für diese Folge gilt

$$\begin{aligned}\frac{k}{e^k} &\leq \frac{k}{1+k+\frac{1}{2}k^2} \\ &= \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k}+\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

ihr Grenzwert ist nach dem Quetschkriterium also 0. Da die Exponentialfunktion stetig ist, konvergiert somit $e^{\frac{\ln n}{n}}$ gegen $e^0 = 1$.

Aufgabe 11. Der Graph der Funktion

$$f(x) = -x^2 + 5x$$

und die x-Achse begrenzen eine Fläche. Bestimme die Gerade durch den Nullpunkt, die diese Fläche in zwei gleich große Teile unterteilt.

Lösung

Es ist

$$-x^2 + 5x = -x(x-5),$$

die Fläche befindet sich also oberhalb des Intervalls $[0,5]$. Eine Stammfunktion von f ist

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2$$

und somit ist

$$\begin{aligned} \int_0^5 f(x)dx &= [-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2]_0^5 \\ &= -\frac{1}{3}125 + \frac{5}{2}25 \\ &= \frac{125}{6}. \end{aligned}$$

Die Gerade durch den Nullpunkt setzen wir als $y = ax$ an. Der Durchstoßungspunkt (abgesehen vom Nullpunkt) mit dem Graphen ergibt sich aus

$$ax = -x^2 + 5x$$

zu

$$x = 5 - a.$$

Die obere Fläche besitzt den Flächeninhalt

$$\begin{aligned} \int_0^{5-a} -x^2 + 5x - axdx &= [-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5-a}{2}x^2]_0^{5-a} \\ &= (5-a)^3(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}) \\ &= (5-a)^3\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Die Bedingung

$$(5-a)^3\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{125}{6}$$

führt auf

$$(5-a)^3 = \frac{125}{2}$$

und damit auf

$$5 - a = \frac{5}{\sqrt[3]{2}}.$$

Also ist

$$a = 5\left(1 - \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right).$$

Aufgabe 12. Bestimme eine Stammfunktion von

$$\frac{5x^3 + 4x - 3}{x^2 + 1}$$

mittels Partialbruchzerlegung.

Lösung

Da der Grad des Zählerpolynoms größer als der Grad des Nennerpolynoms ist, führen wir zuerst eine Polynomdivision durch. Diese ergibt

$$5x^3 + 4x - 3 \;=\; (x^2 + 1)(5x) - x - 3$$

und daher ist

$$\frac{5x^3 + 4x - 3}{x^2 + 1} \;=\; 5x - \frac{x}{x^2 + 1} - 3\frac{1}{x^2 + 1}.$$

Eine Stammfunktion ist also

$$\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 1\right) - 3\arctan x\,.$$

Aufgabe 13. Sei I ein reelles Intervall und sei

$$f\colon\, I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Es sei $a \in I$ und es sei

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

die zugehörige Integralfunktion. Zeige, dass dann F differenzierbar ist und dass

$$F'(x) = f(x)$$

für alle $x \in I$ gilt.

Lösung

Es sei x fixiert. Der Differenzenquotient ist

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \;=\; \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right) \;=\; \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Wir müssen zeigen, dass für $h \to 0$ der Limes existiert und gleich $f(x)$ ist. Dies ist äquivalent dazu, dass der Limes von

$$\frac{1}{h}\left(\int_x^{x+h} f(t)\,dt - hf(x)\right)$$

für $h \to 0$ gleich 0 ist. Mit der durch $f(x)$ gegebenen konstanten Funktion können wir $hf(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dt$ schreiben und damit den Ausdruck

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(t) - f(x))\,dt$$

betrachten. Indem wir die Funktion $f(t) - f(x)$ betrachten, können wir annehmen, dass $f(x) = 0$ ist. Wegen der Stetigkeit von f gibt es zu jedem $\epsilon > 0$

ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $t \in [x-\delta, x+\delta]$ die Abschätzung $|f(t)| \leq \epsilon$ gilt. Damit gilt für $h \in [-\delta, +\delta]$ nach Lemma 23.15 die Abschätzung

$$|\int_x^{x+h} f(t)\,dt\,| \leq |\int_x^{x+h} |f(t)|\,dt\,| \leq |\int_x^{x+h} \epsilon\,dt\,| = |h|\,\epsilon$$

und daher

$$|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt\,| \leq \epsilon.$$

Aufgabe 14. Sei

$$f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetig mit

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

für jede stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige $f = 0$.

Lösung

Nehmen wir an, dass f nicht die Nullfunktion ist. Dann gibt es einen Punkt $c \in [a,b]$ mit $f(c) \neq 0$. Sagen wir $f(c) > 0$. Da f stetig ist, gibt es ein Teilintervall $J = [d,e] \subseteq [a,b]$ mit $f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$ für alle $x \in J$. Die Funktion g sei außerhalb von J die Nullfunktion und auf J durch

$$g(x) \;=\; -(x-d)(x-e)$$

definiert. Die Funktion g ist stetig auf $[a,b]$ und im Innern von $[d,e]$ positiv, also insgesamt nichtnegativ. Daher gibt es ein weiteres Teilintervall $J' = [s,t] \subseteq J$ derart, dass $g(x) \geq \frac{g(\frac{c+d}{2})}{2}$ für alle $x \in J'$ ist. Daher ist

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_c^d f(x)g(x)dx \\ &\geq \int_s^t f(x)g(x)dx \\ &\geq (t-s)\frac{f(c)}{2}\frac{g(\frac{c+d}{2})}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Aufgabe 15. Finde eine Lösung für die gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{t}{t^2-1}y^2$$

mit $t > 1$ und $y < 0$.

Lösung

Es liegt eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen vor. Wir setzen

$$h(y) = \frac{1}{y^2}\,,$$

davon ist

$$H(y) = -y^{-1}$$

eine Stammfunktion. Die Umkehrfunktion davon ist ebenfalls

$$H^{-1}(u) = -u^{-1}\,.$$

Wir setzen weiter $g(t) = \frac{t}{t^2-1}$. Wir machen den Ansatz für die Partialbruchzerlegung, also

$$\frac{t}{t^2-1} \;=\; \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1}.$$

Daraus ergibt sich die Bedingung

$$t \;=\; a(t+1) + b(t-1)$$

und daraus

$$a = b = \frac{1}{2}\,.$$

Also ist

$$G(t) = \frac{1}{2}\,\ln{(t+1)} + \frac{1}{2}\,\ln{(t-1)}$$

eine Stammfunktion von $g(t)$. Daher ist

$$y(t) = \frac{-2}{\ln{(t-1)} + \ln{(t+1)}}$$

eine Lösung, die für $t > 1$ definiert ist und für die $y(t) < 0$ gilt.