Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2012**

Algebraische Kurven

Arbeitsblatt 15

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 15.1. Sei R ein kommutativer lokaler Ring. Zeige, dass R zusammenhängend ist.

Aufgabe 15.2. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und R eine endlich erzeugte kommutative K-Algebra. Es seien F_1 und F_2 zwei topologische Filter in $K-\operatorname{Spek}(R)$ mit $F_1 \subseteq F_2$. Zeige, dass es einen Ringhomomorphismus

$$\mathcal{O}_{F_1} \longrightarrow \mathcal{O}_{F_2}$$

gibt.

Aufgabe 15.3. Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und R eine endlich erzeugte kommutative K-Algebra. Sei $P \in K-\operatorname{Spek}(R)$ ein Punkt. Zeige (ohne Fakt ***** zu verwenden), dass der Halm $\mathcal{O}_P$ ein lokaler Ring ist.

Aufgabe 15.4. Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Zeige, dass $\mathfrak{p}$ ein minimales Primideal ist genau dann, wenn die Reduktion der Lokalisierung $R_{\mathfrak{p}}$ ein Körper ist.

Aufgabe 15.5.*

Sei K ein Körper und R eine integre, endlich erzeugte K-Algebra mit Quotientenkörper $Q(R)$. Sei $q \in Q(R)$. Zeige, dass die Menge

$$\{P \in K-\operatorname{Spek}(R) \mid q \in \mathcal{O}_P\}$$

offen in $K-\operatorname{Spek}(R)$ ist (dabei bezeichnet $\mathcal{O}_P$ den lokalen Ring im Punkt P).

Aufgabe 15.6.*

Sei K ein Körper und seien R und S integre, endlich erzeugte K-Algebren. Es sei

$$\varphi : R \longrightarrow S$$

ein K-Algebra-Homomorphismus und $\mathfrak{n}$ ein maximales Ideal in S mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$. Die Abbildung induziere einen Isomorphismus $R_{\mathfrak{m}} \to S_{\mathfrak{n}}$. Zeige, dass es dann auch ein $f \in R$, $f \notin \mathfrak{m}$, gibt derart, dass $R_f \to S_{\varphi(f)}$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 15.7. Sei K ein Körper und betrachte das Achsenkreuz

$$V = K-\operatorname{Spek}\left(K[X,Y]/(XY)\right).$$

Bestimme für jeden Punkt $P \in V$, ob der lokale Ring an P ein Integritätsbereich ist oder nicht.

Aufgabe 15.8. Sei I eine gerichtete Indexmenge und sei G_i, $i \in I$, ein gerichtetes System von kommutativen Gruppen. Zeige, dass der Kolimes eine kommutative Gruppe ist.

Aufgabe 15.9. Sei I eine gerichtete Indexmenge und sei M_i, $i \in I$, ein gerichtetes System von Mengen. Es sei N eine weitere Menge und zu jedem $i \in I$ sei eine Abbildung

$$\psi_i : M_i \longrightarrow N$$

gegeben mit der Eigenschaft, dass $\psi_i = \psi_j \circ \varphi_{ij}$ ist für alle $i \preccurlyeq j$ (wobei φ_{ij} die Abbildungen des Systems bezeichnen). Beweise die universelle Eigenschaft des Kolimes, nämlich, dass es eine eindeutig bestimmte Abbildung

$$\psi : \operatorname{colim}_{i \in I} M_i \longrightarrow N$$

gibt derart, dass $\psi_i = \psi \circ j_i$ ist, wobei $j_i : M_i \to \operatorname{colim}_{i \in I} M_i$ die natürlichen Abbildungen sind.

Zeige ferner, dass falls M_i eine gerichtetes System von Gruppen und falls N ebenfalls eine Gruppe ist und alle ψ_i Gruppenhomomorphismen sind, dass dann auch ψ ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 15.10. (6 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal. Dann ist der Restklassenring $S = R/\mathfrak{p}$ ein Integritätsbereich mit Quotientenkörper $Q = Q(S)$ und $R_{\mathfrak{p}}$ ist ein lokaler Ring mit dem maximalen Ideal $\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$. Zeige, dass eine natürliche Isomorphie

$$Q(S) \cong R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$$

vorliegt.

(Man nennt diesen Körper auch den *Restekörper* zu $\mathfrak{p}$).

Aufgabe 15.11. (4 Punkte)

Sei K ein Körper und sei R eine K-Algebra von endlichem Typ. Es seien $P_1, \ldots, P_n$ endlich viele Punkte in $X = K-\operatorname{Spek}(R)$. Zeige, dass der Umgebungsfilter dieser Punkte durch offene Mengen der Form $D(f)$ erzeugt wird.

D.h. es ist zu zeigen, dass es zu $P_1, \ldots, P_n \in U$ offen stets ein $F \in R$ gibt mit $P_1, \ldots, P_n \in D(F) \subseteq U$

Aufgabe 15.12. (4 Punkte)

Sei R eine integre K-Algebra R von endlichem Typ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper. Sei $q \in Q = Q(R)$ ein Element im Quotientenkörper von R. Zeige, dass

$$\mathfrak{a} = \{f \in R | \text{ es gibt } n \in \mathbb{N} \text{ mit } f^n q \in R\}$$

ein Ideal in R ist. Zeige ferner, dass $D(\mathfrak{a}) \subseteq K-\operatorname{Spek}(R)$ der (maximale) Definitionsbereich der algebraischen Funktion q ist.

Aufgabe 15.13. (5 Punkte)

Sei K ein Körper, sei R eine kommutative K-Algebra von endlichem Typ und sei S ein multiplikatives System in R. Zu S definieren wir

$$F(S) = \{U \subseteq K - \operatorname{Spek}(R) \text{ offen}: \text{ es gibt } f \in S \text{ mit } D(f) \subseteq U\}.$$

Zeige, dass $F = F(S)$ ein topologischer Filter ist. Zeige ferner, dass es einen Ringhomomorphismus

$$R_S \longrightarrow \mathcal{O}_F$$

gibt, der eine Isomorphie ist, falls K algebraisch abgeschlossen und R reduziert ist.

Aufgabe 15.14. (5 Punkte)

Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und betrachte die affine Ebene $\mathbb{A}_K^2$ zusammen mit der x-Achse

$$V = V(y)\,.$$

Zeige, dass die folgende Menge ein saturiertes multiplikatives System ist.

$$S = \left\{ f \in K[X,Y] \,|\, \text{In der homogenen Komponente } f_{\deg(f)} \text{ kommt } x^{\deg(f)} \text{ vor} \right\}\,.$$

Skizziere die Nullstellenmenge von einigen Polynomen, die oder die nicht zu S gehören.

Sei F der zugehörige topologische Filter. Vergleiche F mit dem Umgebungsfilter zu V und dem generischen Filter zu V.

Aufgabe 15.15. (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und sei $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Auf S betrachten wir folgende (partielle) Ordnung, und zwar sagen wir $f \preccurlyeq g$, falls f eine Potenz von g teilt. Zeige, dass die kommutativen Ringe

$$R_f,\ f \in S\,,$$

ein gerichtetes System bilden, und dass für den Kolimes gilt

$$\operatorname{colim}_{f \in S} R_f = R_S\,.$$

Aufgabe 15.16. (4 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring und seien $f_1, \ldots, f_n \in R$ Elemente, die das Einheitsideal erzeugen. Es sei vorausgesetzt, dass die Nenneraufnahmen R_{f_i} noethersch sind für $i = 1, \ldots, n$. Zeige, dass dann auch R noethersch ist.