Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2014**

Analysis II

Arbeitsblatt 52

Übungsaufgaben

Mit diffeomorph ist im Folgenden stets C^1-diffeomorph gemeint.

Aufgabe 52.1. Definiere explizit einen Diffeomorphismus zwischen $\mathbb{R}^n$ und einer offenen Kugel $U(0,r) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 52.2. Zeige, dass eine offene Kreisscheibe $U(P,r) \subseteq \mathbb{R}^2$ $(r > 0)$ und ein offenes Rechteck $]a,b[\times]c,d[$ $(b > a, d > c)$ diffeomorph sind.

Aufgabe 52.3. Bestimme die regulären Punkte der Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x^2y, x - \sin y).$$

Zeige, dass φ in $P = (1,0)$ regulär ist und bestimme das totale Differential der Umkehrabbildung von $\varphi|_U$ in $\varphi(P)$, wobei U eine offene Umgebung von P sei (die nicht explizit angegeben werden muss).

Aufgabe 52.4.*

Man gebe für jedes $n \in \mathbb{N}_+$ eine bijektive, total differenzierbare Abbildung

$$\varphi_n\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

an, für die das totale Differential in mindestens einem Punkt nicht regulär ist.

Aufgabe 52.5. Seien U, V, W euklidische Vektorräume und seien $\varphi : U \longrightarrow V$ und $\psi : V \longrightarrow W$ differenzierbare Abbildungen. Es sei φ regulär in $P \in U$ und ψ regulär in $Q = \varphi(P) \in V$. Ist dann $\psi \circ \varphi$ regulär in P? Unter welchen Voraussetzungen stimmt dies?

Aufgabe 52.6. Das komplexe Quadrieren

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^2,$$

kann man reell schreiben als

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ x+iy = (x,y) \longmapsto (x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy = (x^2-y^2, 2xy).$$

Untersuche φ auf reguläre Punkte. Auf welchen (möglichst großen) offenen Teilmengen ist φ umkehrbar?

Aufgabe 52.7. Finde möglichst große offene Teilmengen $G \subseteq \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ und $H \subseteq \mathbb{C}$ derart, dass die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^3,$$

einen Diffeomorphismus von G nach H induziert.

Aufgabe 52.8.*

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi\colon\ \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto \left(\frac{y^2}{x}, \frac{y^3}{x^2} \right).$$

a) Bestimme die regulären Punkte der Abbildung φ.

b) Zeige, dass φ in $P = (1,2)$ lokal eine differenzierbare Umkehrabbildung $\psi = \varphi^{-1}$ besitzt, und bestimme das totale Differential von ψ im Punkt $\varphi(P)$.

c) Man gebe alle Punkte $Q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}$ an, in denen φ nicht lokal invertierbar ist.

Aufgabe 52.9. Es seien $P_1, \ldots, P_n$ und $Q_1, \ldots, Q_n$ Punkte in der Ebene $\mathbb{R}^2$. Zeige, dass die beiden offenen Mengen $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{P_1, \ldots, P_n\}$ und $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{Q_1, \ldots, Q_n\}$ zueinander diffeomorph sind.

Aufgabe 52.10. Es sei

$$T = \left\{ \frac{1}{n} | \, n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{0\},$$

$$U = \mathbb{R} \setminus T$$

und

$$V = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$$

Zeige, dass U und V zueinander diffeomorph sind.

Aufgabe 52.11. Es sei

$$T = \left\{ \left(\frac{1}{n}, 0 \right) \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{(0,0)\},$$

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus T$$

und

$$V = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}.$$

Zeige, dass U und V zueinander nicht homöomorph sind.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 52.12. (7 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, (x,y) \longmapsto (x+y, xy).$$

(1) Bestimme die regulären Punkte von φ.
(2) Zeige, dass in den kritischen Punkten die Abbildung φ nicht lokal invertierbar ist, dass also die Einschränkung von φ in keiner offenen Umgebung eines kritischen Punktes bijektiv wird.
(3) Lässt sich jedes reelle Zahlenpaar (s,p) schreiben als $(s,p) = (x + y, xy)$?
(4) Ist ein reelles Zahlenpaar (x,y) bis auf Vertauschen der Komponenten eindeutig durch die Summe $x+y$ und das Produkt xy festgelegt?

Aufgabe 52.13. (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \, (x,y,z) \longmapsto (x+y+z, xy+xz+yz, xyz).$$

Zeige, dass ein Punkt (x,y,z) genau dann ein kritischer Punkt von φ ist, wenn in (x,y,z) zwei Zahlen doppelt vorkommen.

Aufgabe 52.14. (5 Punkte)

Betrachte die Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \, (x,y,z) \longmapsto (x^2 - y^2 z, y + \sin xz).$$

Zeige, dass die Menge der kritischen Punkte von φ eine Gerade umfasst, aber auch noch weitere (mindestens einen) Punkte enthält.

Aufgabe 52.15. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y) \longmapsto (x, xy).$$

Bestimme die regulären Punkte, die Fasern, das Bild und das Bild aller regulären Punkte dieser Abbildung. Man gebe möglichst große offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ derart an, dass

$$\varphi|_{U_1} \colon U_1 \longrightarrow U_2$$

ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 52.16. (4 Punkte)

Es seien $U_1, U_2 \subseteq \mathbb{R}^k$ und $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen mit $0 \in V_1, V_2$ und es sei

$$\varphi \colon U_1 \times V_1 \longrightarrow U_2 \times V_2$$

ein Diffeomorphismus, der eine Bijektion zwischen $U_1 \times \{0\}$ und $U_2 \times \{0\}$ induziert. Zeige, dass dann auch die Einschränkung von φ auf $U_1 \cong U_1 \times \{0\}$ nach $U_2 \cong U_2 \times \{0\}$ ein Diffeomorphismus ist.