Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Vorlesung 82

Orientierungen auf reellen Vektorräumen

Es seien V und W zwei zweidimensionale reelle Vektorräume mit den Basen v_1, v_2 bzw. w_1, w_2. Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

gegeben mit $\varphi(v_1) = aw_1 + bw_2$ und $\varphi(v_2) = cw_1 + dw_2$. Die Matrix, die diese lineare Abbildung beschreibt, ergibt sich, indem man die Koordinaten des Bildvektors des i-ten Basisvektors als i-te Spalte schreibt. Bei der gegebenen Nummerierung ergibt sich also die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$

und ihre Determinante $ab - cd$. Wenn man hingegen die Reihenfolge von v_1 und v_2 vertauscht (also mit der Basis $u_1 = v_2$ und $u_2 = v_1$ arbeitet), so ist die beschreibende Matrix

$$\begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$$

mit der Determinante $cd - ab = -(ab - cd)$. Abhängig von der gewählten Basis kann also die Determinante mal positiv, mal negativ sein (bei einem Endomorphismus kann das nicht passieren, wenn man vorne und hinten stets die gleiche Basis nimmt).

Im Folgenden ist es wichtig, dass man unter einer Basis nicht die Menge der Basisvektoren $\{v_1, \ldots, v_n\}$, sondern das geordnete Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ der Basisvektoren versteht.

Definition 82.1. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Man nennt zwei Basen $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_n$ *orientierungsgleich*, wenn die Determinante ihrer Übergangsmatrix positiv ist.

Diese Relation zwischen Basen ist eine Äquivalenzrelation, und zwar eine, bei der es nur zwei Äquivalenzklassen (genannt *Orientierungen* oder *Orientierungsklassen*) gibt (außer beim Nullraum).

Definition 82.2. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Eine *Orientierung* auf V ist eine Äquivalenzklasse von Basen von V unter der Äquivalenzrelation, orientierungsgleich zu sein.

Es ist einfach, zu bestimmen, ob zwei Basen die gleiche oder die entgegengesetzte Orientierung besitzen, es macht aber keinen Sinn, die einzelnen Orientierungen zu benennen.

Viele Objekte aus Natur und Technik machen deutlich, dass es zwei verschiedene Orientierungen gibt. Es ist einfach, bei gleichartigen Objekten wie Federn die mit der gleichen und die mit der entgegengesetzten Orientierung zu erkennen. Die Benennung der beiden Orientierungen und welchen mathematischen (durch eine Basis repräsentierten) Orientierungen sie entsprechen ist eine Frage der Konvention.

Definition 82.3. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum. Er heißt *orientiert*, wenn auf ihm eine Orientierung erklärt ist.

Ein Vektorraum wird dadurch orientiert, indem man bspw. sagt, dass V die Orientierung tragen möge, die durch die Basis $v_1, \ldots, v_n$ repräsentiert wird. Der Standardraum $\mathbb{R}^n$ trägt, wenn nichts anderes gesagt wird, die sogenannte *Standardorientierung*, die durch die Standardbasis $e_1, \ldots, e_n$ repräsentiert wird.

Definition 82.4. Es seien V und W zwei endlichdimensionale orientierte reelle Vektorräume. Eine bijektive lineare Abbildung

$$\varphi : V \longrightarrow W$$

heißt *orientierungstreu*, wenn für jede Basis $v_1, \ldots, v_n$, die die Orientierung auf V repräsentiert, die Bildvektoren $\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)$ die Orientierung auf W repräsentieren.

Es genügt, diese Eigenschaft für eine einzige, die Orientierung repräsentierende Basis nachzuweisen, siehe Aufgabe 82.4.

Bei einem eindimensionalen reellen Vektorraum V (einer Geraden) ist eine Orientierung einfach durch einen einzigen Vektor $v \neq 0$ gegeben, d.h. es wird einfach eine der beiden „Halbgeraden“ als positiv ausgezeichnet. Dies ist wiederum äquivalent zu einer Identifizierung von V mit $\mathbb{R}$, der mit der Standardorientierung versehen ist, bei der 1 positiv ist. Unter Bezug auf das Dachprodukt kann man generell die Orientierung auf einem reellen Vektorraum auf die Orientierung einer Geraden zurückführen, wie die folgende Aussage zeigt.

Lemma 82.5. *Es sei $V \neq 0$ ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum der Dimension n. Dann entsprechen durch die Zuordnung*

$$[v_1, \ldots, v_n] \longmapsto [v_1 \wedge \ldots \wedge v_n]$$

die Orientierungen auf V den Orientierungen auf $\bigwedge^n V$.

Beweis. Es seien $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_n$ zwei Basen von V mit der Übergangsbeziehung

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Dann gilt nach Korollar 80.7

$$w_1 \wedge \ldots \wedge w_n = (\det M) v_1 \wedge \ldots \wedge v_n,$$

woraus die Wohldefiniertheit der Abbildung und die Aussage folgt. $\square$

Eine rechtswinkende Winkerkrabbe. Wenn sie sich auf einer dreidimensionalen orientierten Mannigfaltigkeit bewegt, bleibt sie stets rechtswinkend (weshalb es sich um einen sinnvollen Begriff handelt). Auf einer nicht orientierbaren Mannigfaltigkeit kann sie linkswinkend werden.

Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten

Definition 82.6. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine Karte

$$\alpha : U \longrightarrow V$$

mit $U \subseteq M$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen heißt *orientiert*, wenn der $\mathbb{R}^n$ orientiert ist.

Wenn man einen Atlas aus orientierten Karten (U_i, V_i, α_i) hat, so haben die Orientierungen auf den umgebenden Zahlräumen $\mathbb{R}^n$, in denen die offenen Bilder V_i der Karten liegen, erstmal nichts miteinander zu tun (obwohl man stets $\mathbb{R}^n$ schreibt). Ein Zusammenhang zwischen den Orientierungen wird erst durch die beiden folgenden Begriffe formulierbar.

Definition 82.7. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und es seien (U_1, V_1, α_1) und (U_2, V_2, α_2) orientierte Karten. Dann heißt der zugehörige Kartenwechsel

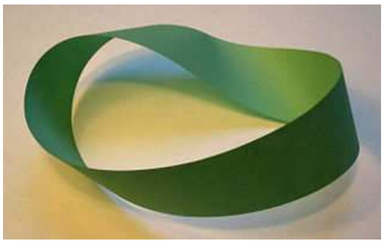
$$\psi = \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1} : V_1 \cap \alpha_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow V_2 \cap \alpha_2(U_1 \cap U_2)$$

orientierungstreu, wenn für jeden Punkt $Q \in V_1 \cap \alpha_1(U_1 \cap U_2)$ das totale Differential

$$(D\psi)_Q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

orientierungstreu ist.

Definition 82.8. Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit M mit einem Atlas (U_i, V_i, α_i) heißt *orientiert*, wenn jede Karte orientiert ist und wenn sämtliche Kartenwechsel orientierungstreu sind.



Das Möbius-Band ist das typische Beispiel einer nicht orientierbaren Mannigfaltigkeit. Damit es eine Manigfaltigkeit ist, darf der Rand nicht dazu gehören; dann ist es aber auch keine abgeschlossene Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, diese sind nämlich stets orientierbar.

Bei einer orientierten Mannigfaltigkeit besitzt jeder Tangentialraum $T_P M$ eine Orientierung. Man kann einfach eine beliebige Kartenumgebung $P \in U$ wählen und die Orientierung auf $V \subseteq \mathbb{R}^n$ mittels $T_P(\alpha^{-1})$ nach $T_P M$ transportieren. Wegen der Orientierungstreue der Kartenwechsel ist diese Orientierung unabhängig von der gewählten Kartenumgebung.

In einer orientierten Mannigfaltigkeit kann man auch zu zwei Basen in den Tangentialräumen zu zwei verschiedenen Punkten sagen, ob sie die gleiche Orientierung repräsentieren oder nicht. Dies ist der Fall, wenn beide Basen die Orientierung der Mannigfaltigkeit repräsentieren oder aber beide nicht.

Eine Mannigfaltigkeit heißt *orientierbar*, wenn sie diffeomorph zu einer orientierten Mannigfaltigkeit ist. D.h. wenn es einen Atlas gibt, der die gleiche differenzierbare Struktur definiert und der zusätzlich orientiert werden kann.

Kompaktheit

Teilmengen eines euklidischen Raumes, die sowohl abgeschlossen als auch beschränkt sind, nennt man kompakt. Auf topologischen Räumen, die nicht durch eine Metrik gegeben sind, kann man nicht von beschränkt sprechen, aber auch bei einem metrischen Raum, der keine Teilmenge eines $\mathbb{R}^n$ ist, führen die beiden Eigenschaften abgeschlossen und beschränkt nicht sehr weit. Schlagkräftiger ist das folgende Konzept.

Definition 82.9. Ein topologischer Raum X heißt *kompakt* (oder *überdeckungskompakt*), wenn es zu jeder offenen Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{mit } U_i \text{ offen und einer beliebigen Indexmenge}$$

eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ gibt derart, dass

$$X = \bigcup_{i \in J} U_i$$

ist.

Diese Eigenschaft nennt man manchmal auch *überdeckungskompakt.* Häufig nimmt man zu kompakt noch die Eigenschaft Hausdorffsch mit auf. Es sei betont, dass diese Eigenschaft nicht besagt, dass es eine endliche Überdeckung aus offenen Mengen gibt (es gibt immer die triviale offene Überdeckung mit dem Gesamtraum), sondern dass man, wenn irgendeine irgendwie indizierte offene Überdeckung vorliegt, dann nur eine endliche Teilmenge aus der Indexmenge für die Überdeckung nötig ist.

Lemma 82.10. *Es sei X ein Hausdorff-Raum mit einer abzählbaren Basis. Dann ist X genau dann kompakt, wenn jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X einen Häufungspunkt (in X) besitzt.*

Beweis. Sei X kompakt und sei eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben. Nehmen wir an, dass diese Folge keinen Häufungspunkt besitzt. Das bedeutet, dass es zu jedem $y \in X$ eine offene Umgebung $y \in U_y$ gibt, in der es nur endlich viele Folgenglieder gibt. Wegen $X = \bigcup_{y \in X} U_y$ gibt es nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung $X = \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$. Diese enthält einerseits alle Folgenglieder und andererseits nur endlich viele Folgenglieder, ein Widerspruch.

Sei die Folgeneigenschaft erfüllt und sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine Überdeckung mit offenen Mengen. Da X eine abzählbare Basis besitzt, gibt es nach Aufgabe 63.4 eine abzählbare Teilmenge $J \subseteq I$ mit $X = \bigcup_{i \in J} U_i$. Wir können $J = \mathbb{N}$ annehmen. Nehmen wir an, dass die Überdeckung $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Dann ist insbesondere $\bigcup_{i=0}^n U_i \neq X$, und daher gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $x_n \notin \bigcup_{i=0}^n U_i$. Nach Voraussetzung besitzt diese Folge einen Häufungspunkt x. Da eine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ vorliegt, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_k$. Da x ein Häufungspunkt ist, liegen unendlich viele Folgenglieder in U_k. Dies ist ein Widerspruch, da nach Konstruktion für $n \geq k$ die Folgenglieder x_n nicht zu U_k gehören. □

Satz 82.11. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *T ist überdeckungskompakt.*

(2) *Jede Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* T *besitzt einen Häufungspunkt in* T.
(3) *Jede Folge* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in* T *besitzt eine in* T *konvergente Teilfolge.*
(4) T *ist abgeschlossen und beschränkt.*

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) wurde allgemeiner in Lemma 82.10 bewiesen. Die Äquivalenz von (2) und (3) ist klar. Die Äquivalenz von (3) und (4) wurde in Satz 22.3 gezeigt. □

Maße auf Mannigfaltigkeiten

Es sei M eine Mannigfaltigkeit. Gibt es ein sinnvolles Volumen für (Teilmengen von) M, wann kann man eine auf M definierte Funktion sinnvoll integrieren? Wenn man die Maßtheorie als allgemeines Konzept zugrunde legt, so ergibt sich folgendes Bild: es sei vorausgesetzt, dass M einen abzählbaren Atlas $(U_i, V_i, \alpha_i, i \in I)$ besitzt. Ein Maß μ auf den Borelmengen $\mathcal{B}(M)$ ist dann durch die Einschränkungen $\mu_i = \mu|_{U_i}$ des Maßes auf die offenen Teilmengen U_i eindeutig bestimmt. Für jedes $i \in I$ definiert die Homöomorphie

$$\alpha_i : U_i \longrightarrow V_i$$

das Bildmaß $\nu_i = \alpha_{i*}\mu_i$ auf $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$. Dabei stehen die Bildmaße ν_i, $i \in I$, untereinander in der Beziehung

$$\nu_i(\alpha_i(T)) \,=\, \mu(T) \,=\, \nu_j(\alpha_j(T))$$

für jede messbare Teilmenge $T \subseteq U_i \cap U_j$. Mit den Kartenwechseln $\psi_{ij} = \alpha_j \circ \alpha_i^{-1}$ bedeutet dies

$$\nu_i(S) \,=\, \nu_j(\psi_{ij}(S))$$

für jede messbare Menge $S \subseteq V_i$, die ganz innerhalb des Definitionsbereiches der Übergangsabbildung liegt.

Nehmen wir nun an, dass sich die Bildmaße ν_i jeweils mit einer Dichte bzgl. des Borel-Lebesgue-Maßes λ^n schreiben lassen, sagen wir

$$\nu_i = g_i d\lambda^n\,,$$

mit auf V_i definierten integrierbaren Funktionen $g_i : V_i \to \mathbb{R}$. Für eine messbare Teilmenge $T \subseteq U_i$ gilt dann also

$$\mu(T) \,=\, \nu_i(\alpha_i(T)) \,=\, \int_{\alpha_i(T)} g_i\, d\lambda^n.$$

Für eine messbare Teilmenge $T \subseteq U_i \cap U_j$ gilt somit nach der Transformationsformel, angewendet auf die diffeomorphe Übergangsabbildung

$$\psi_{ij} : V_i \cap \alpha_i(U_j) \longrightarrow V_j \cap \alpha_j(U_i),$$

die $\alpha_i(T)$ in $\alpha_j(T)$ überführt, die Gleichheit

$$\int_{\alpha_i(T)} g_i\, d\lambda^n \quad = \quad \int_{\alpha_j(T)} g_j\, d\lambda^n$$

$$= \int_{\alpha_i(T)} |\det(D\psi_{ij})| \cdot (\psi_{ij} \circ g_j)\, d\lambda^n.$$

Dies legt für die Dichtefunktionen g_i, $i \in I$, das Transformationsverhalten

$$g_i = |\det(D\psi_{ij})| \cdot (\psi_{ij} \circ g_j)$$

nahe (auch wenn es dies nicht erzwingt, da eine Dichte durch ihr Maß nicht eindeutig bestimmt ist). Wir werden die Integrationstheorie für Mannigfaltigkeiten auf dem Konzept der n-Differentialformen aufbauen, die in natürlicher Weise dieses Transformationsverhalten (ohne den Betrag) besitzen.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Kulifeder.JPG, Autor = Benutzer Ghinrael auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 2.0 2

Quelle = Ressort de compression.jpg, Autor = Benutzer Jean-Jacques MILAN auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 2

Quelle = One Big Arm.jpg, Autor = Charles Lam (= Benutzer Brian679 auf Commons), Lizenz = CC-by-sa 2.0 3

Quelle = Möbius strip.jpg, Autor = Benutzer Dbenbenn auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 4