

**Vorkurs Mathematik****Arbeitsblatt 5****Übungsaufgaben**

AUFGABE 5.1. Man gebe ein Beispiel für eine Cauchy-Folge in  $\mathbb{Q}$ , die (in  $\mathbb{Q}$ ) nicht konvergiert.

AUFGABE 5.2. Sei  $a \in \mathbb{R}$  eine nichtnegative reelle Zahl und  $c \in \mathbb{R}_+$ . Zeige, dass die rekursiv definierte Folge mit  $x_0 = c$  und

$$x_{n+1} := \frac{x_n + a/x_n}{2}$$

gegen  $\sqrt{a}$  konvergiert.

AUFGABE 5.3. Es sei  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  die Folge der Fibonacci-Zahlen und

$$x_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}.$$

Zeige, dass diese Folge in  $\mathbb{R}$  konvergiert und dass der Grenzwert  $x$  die Bedingung

$$x = 1 + x^{-1}$$

erfüllt. Berechne daraus  $x$ .

Tipp: Zeige zuerst mit Hilfe der Simpson-Formel, dass man mit diesen Brüchen eine Intervallschachtelung basteln kann.

Vor der nächsten Aufgabe erinnern wir an die beiden folgenden Definitionen.

Zu zwei reellen Zahlen  $x$  und  $y$  heißt

$$\frac{x + y}{2}$$

das *arithmetische Mittel*.

Zu zwei nichtnegativen reellen Zahlen  $x$  und  $y$  heißt

$$\sqrt{x \cdot y}$$

das *geometrische Mittel*.

AUFGABE 5.4. Es seien  $x$  und  $y$  zwei nichtnegative reelle Zahlen. Zeige, dass das arithmetische Mittel der beiden Zahlen mindestens so groß wie ihr geometrisches Mittel ist.

AUFGABE 5.5. Bestimme die Ziffernentwicklung im Dualsystem derjenigen reellen Zahl, die im Dezimalsystem durch  $0,\overline{3}$  gegeben ist.

AUFGABE 5.6. Es sei  $I_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine Intervallschachtelung in  $\mathbb{R}$ . Zeige, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt  $x \in \mathbb{R}$  besteht.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 5.7. (3 Punkte)

Man gebe Beispiele für konvergente reelle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $x_n \neq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , und mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  derart, dass die Folge

$$\left( \frac{y_n}{x_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

- (1) gegen 0 konvergiert,
- (2) gegen 1 konvergiert,
- (3) divergiert.

AUFGABE 5.8. (3 Punkte)

Bestimme die Ziffernentwicklung im Dreiersystem derjenigen reellen Zahl, die im Dezimalsystem durch  $0,\overline{17}$  gegeben ist.

AUFGABE 5.9. (4 Punkte)

Es sei  $I_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , eine Intervallschachtelung in  $\mathbb{R}$  und sei  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine reelle Folge mit  $x_n \in I_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Zeige, dass diese Folge gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl konvergiert.

## AUFGABE 5.10. (6 Punkte)

Es seien  $b > a > 0$  positive reelle Zahlen. Wir definieren rekursiv zwei Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  durch  $x_0 = a$ ,  $y_0 = b$  und durch

$$x_{n+1} = \text{geometrisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n,$$

$$y_{n+1} = \text{arithmetisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n.$$

Zeige, dass  $[x_n, y_n]$  eine Intervallschachtelung ist.