Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Vorkurs Mathematik

Arbeitsblatt 5

Übungsaufgaben

Aufgabe 5.1. Man gebe ein Beispiel für eine Cauchy-Folge in $\mathbb{Q}$, die (in $\mathbb{Q}$) nicht konvergiert.

Aufgabe 5.2. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende reelle Folge, die nach oben beschränkt ist. Es gelte also $x_m \leq x_n$ für $m \leq n$ und $x_n \leq b$ für alle n und eine gewisse reelle Zahl b. Zeige, dass $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 5.3. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine nichtnegative reelle Zahl und $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die rekursiv definierte Folge mit

$$x_{n+1} := \frac{x_n + a/x_n}{2}$$

gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Aufgabe 5.4. Bestimme die Dezimalentwicklung von $\frac{5}{7}$ anhand des in Satz 5.5 besprochenen Rekursionsschemas.

Aufgabe 5.5. Bestimme die rationale Zahl, die im Dezimalsystem durch

$$0,11\overline{05}$$

gegeben ist.

Aufgabe 5.6. Bestimme die Ziffernentwicklung im Dualsystem derjenigen reellen Zahl, die im Dezimalsystem durch $0,\overline{3}$ gegeben ist.

Aufgabe 5.7. Man gebe Beispiele für konvergente reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, und mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ derart, dass die Folge

$$\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

(1) gegen 0 konvergiert,
(2) gegen 1 konvergiert,
(3) divergiert.

Aufgabe 5.8. Bestimme die Ziffernentwicklung im Dreiersystem derjenigen reellen Zahl, die im Dezimalsystem durch $0,\overline{17}$ gegeben ist.

AUFGABE 5.9. Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$. Zeige, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ besteht.

AUFGABE 5.10. Es sei I_n, $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in $\mathbb{R}$ und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass diese Folge gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl konvergiert.

AUFGABE 5.11. Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen und

$$x_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}.$$

Zeige, dass diese Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert und dass der Grenzwert x die Bedingung

$$x = 1 + x^{-1}$$

erfüllt. Berechne daraus x.

Tipp: Zeige zuerst mit Hilfe der Simpson-Formel, dass man mit diesen Brüchen eine Intervallschachtelung basteln kann.

Vor der nächsten beiden Aufgabe erinnern wir an die beiden folgenden Definitionen.

Zu zwei reellen Zahlen x und y heißt

$$\frac{x+y}{2}$$

das *arithmetische Mittel*.

Zu zwei nichtnegativen reellen Zahlen x und y heißt

$$\sqrt{x \cdot y}$$

das *geometrische Mittel*.

AUFGABE 5.12. Es seien x und y zwei nichtnegative reelle Zahlen. Zeige, dass das arithmetische Mittel der beiden Zahlen mindestens so groß wie ihr geometrisches Mittel ist.

AUFGABE 5.13. Es seien $b > a > 0$ positive reelle Zahlen. Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $x_0 = a$, $y_0 = b$ und durch

$$x_{n+1} = \text{ geometrisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,,$$

$$y_{n+1} = \text{ arithmetisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n\,.$$

Zeige, dass $[x_n, y_n]$ eine Intervallschachtelung ist.