

Analysis II

Vorlesung 36

Kompaktheit

DEFINITION 36.1. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^m$ heißt *kompakt*, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.

SATZ 36.2. Sei $T \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Teilmenge. Dann ist T genau dann kompakt, wenn jede Folge in T eine in T konvergente Teilfolge besitzt.

Beweis. Wenn T nicht beschränkt ist, so gibt es zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in T$ mit $d(x_n, 0) \geq n$. Diese Folge kann keine konvergente Teilfolge besitzen. Wenn T nicht abgeschlossen ist, so gibt es nach Satz 33.16 eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$, die gegen ein $x \in \mathbb{R}^m$, $x \notin T$, konvergiert. Jede Teilfolge davon konvergiert ebenfalls gegen x , so dass es keine in T konvergente Teilfolge geben kann.

Sei nun T abgeschlossen und beschränkt, und sei eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in T$ vorgegeben. Für diese Folge ist insbesondere jede Komponentenfolge $(x_{in})_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt. Wir betrachten die erste Komponente $i = 1$. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass gibt es eine Teilfolge $(x_{n_j})_{n \in \mathbb{N}}$ derart, dass die erste Komponente dieser Folge konvergiert. Aus dieser Teilfolge wählen wir nun eine weitere Teilfolge derart, dass auch die zweite Komponentenfolge konvergiert. Insgesamt erhält man durch dieses Verfahren eine Teilfolge, wo jede Komponentenfolge konvergiert. Nach Lemma 33.13 konvergiert dann die gesamte Teilfolge in \mathbb{R}^m . Da T abgeschlossen ist, liegt nach Satz 33.16 der Grenzwert in T . \square

SATZ 36.3. Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine stetige Abbildung. Dann ist auch das Bild $f(T)$ kompakt.

Beweis. Es sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in f(T)$ eine Folge, wobei wir $y_n = f(x_n)$ mit $x_n \in T$ schreiben können. Da T kompakt ist, gibt es nach Satz 36.2 eine konvergente Teilfolge x_{n_i} , $i \in \mathbb{N}$, die gegen ein $x \in T$ konvergiert. Aufgrund der Stetigkeit konvergiert auch die Bildfolge $y_{n_i} = f(x_{n_i})$ gegen $f(x)$. Damit ist eine konvergente Teilfolge gefunden und $f(T)$ ist kompakt nach Satz 36.2. \square

SATZ 36.4. Sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere kompakte Teilmenge und sei

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es $x \in T$ mit

$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in T.$$

D.h., dass die Funktion ihr Maximum (und ihr Minimum) annimmt.

Beweis. Aufgrund von Satz 36.2 ist $f(T)$ kompakt, also abgeschlossen und beschränkt. Insbesondere ist $f(T) \leq M$ für eine reelle Zahl M . Wegen $T \neq \emptyset$ besitzt $f(T)$ wegen Satz 7.5 ein Supremum s in \mathbb{R} , das wegen der Abgeschlossenheit zu $f(T)$ gehört, also das Maximum von $f(T)$ ist. Daher gibt es auch ein $x \in T$ mit $f(x) = s$. \square

SATZ 36.5. Sei $P \in \mathbb{K}[X]$ ein Polynom. Dann gibt es ein $w \in \mathbb{K}$ mit

$$|P(z)| \geq |P(w)|$$

für alle $z \in \mathbb{K}$. D.h. das Minimum des Betrags eines Polynoms wird angenommen.

Beweis. Es sei

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

(mit $a_n \neq 0$). Wir setzen $a = \max(|a_i|, i = 0, \dots, n-1)$ und $r := \max(\frac{na+|a_0|+1}{|a_n|}, 1)$. Bei $n = 0$ ist die Aussage klar, sei also $n \geq 1$. Für z mit $|z| \geq r$ gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |a_n z^n| - \left| \sum_{i=0}^{n-1} a_i z^i \right| \\ &\geq |a_n| |z|^n - \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| |z|^i \\ &\geq |a_n| |z|^n - \sum_{i=0}^{n-1} a |z|^{n-1} \\ &\geq |z|^{n-1} (|a_n| |z| - na) \\ &\geq |a_0| + 1 \\ &> |a_0|. \end{aligned}$$

Auf der kompakten Menge $B(0, r)$ nimmt die stetige Funktion $z \mapsto |P(z)|$ nach Satz 36.4 ihr Minimum an, d.h. es gibt ein $w \in B(0, r)$ mit $|P(z)| \geq |P(w)|$ für alle $z \in B(0, r)$. Wegen $|a_0| = |P(0)| \geq |P(w)|$ und der Überlegung für z mit $|z| \geq r$ ergibt sich, dass im Punkt w überhaupt das Minimum der Funktion angenommen wird. \square

Der Fundamentalsatz der Algebra

SATZ 36.6. Jedes nichtkonstante Polynom $P \in \mathbb{C}[X]$ über den komplexen Zahlen besitzt eine Nullstelle.

Beweis. Es sei $P \in \mathbb{C}[Z]$ ein nichtkonstantes Polynom. Aufgrund von Satz 36.5 gibt es ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|P(z)| \geq |P(z_0)|$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Wir müssen zeigen, dass dieses Betragsminimum 0 ist. Wir nehmen also an, dass $|P(z_0)| > 0$ ist, und müssen dann ein z_1 finden, an dem der Betrag des Polynoms kleiner wird. Durch Verschieben (d.h. indem wir die Situation in der neuen Variablen $z - z_0$ betrachten) können wir annehmen, dass das Minimum an der Stelle 0 angenommen wird, und durch Division durch $P(z_0)$ können wir annehmen, dass das Polynom im Nullpunkt den Wert 1 besitzt. D.h. wir können annehmen, dass ein Polynom

$$P = 1 + c_k z^k + c_{k+1} z^{k+1} + \dots + c_d z^d$$

mit $k \geq 1$ und $c_k \neq 0$ vorliegt, das im Nullpunkt das Betragsminimum annimmt. Wegen Korollar 21.9 gibt es ein $\gamma \in \mathbb{C}$ mit $\gamma^k = -c_k^{-1}$. Wir setzen $z = \gamma w$ (das ist eine Variablenstreckung). In der neuen Variablen w erhalten wir ein Polynom der Form

$$1 - w^k + w^{k+1}Q(w),$$

das nach wie vor im Nullpunkt das Betragsminimum annimmt (hierbei ist $Q(w) \in \mathbb{C}[w]$ ein Polynom). Aufgrund von Satz 36.4 gibt es ein $b \in \mathbb{R}_+$ mit $|Q(w)| \leq b$ für alle $w \in B(0, 1)$. Für reelles w mit $0 < w < \min(1, b^{-1})$ gilt

$$\begin{aligned} |1 - w^k + w^{k+1}Q(w)| &\leq |1 - w^k| + |w^{k+1}Q(w)| \\ &= 1 - w^k + w^{k+1}|Q(w)| \\ &= 1 - w^k(1 - w|Q(w)|) \\ &< 1. \end{aligned}$$

Wir haben also Stellen gefunden, wo der Betrag des Polynoms einen kleineren Wert annimmt, ein Widerspruch. \square

Abbildungsverzeichnis