Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2014**

Analysis II

Vorlesung 35

Integrale von Grenzfunktionen

Lemma 35.1. *Es sei*

$$f_n \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine gleichmäßig konvergente Folge von stetigen Funktionen mit der Grenzfunktion

$$f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Dann gilt die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

Beweis. Da die Grenzfunktion nach Lemma 16.4 stetig ist, existiert das bestimmte Integral rechts nach Satz 23.14. Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es ein n_0 mit

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$$

für alle $n \geq n_0$ und alle $t \in [a,b]$. Daher gilt für diese n die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \right| &\leq \left| \int_a^b f_n(t) - f(t)\,dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,dt \\ &\leq \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a}\,dt \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

Satz 35.2. *Sei (M,d) ein metrischer Raum und $[a,b]$ ein kompaktes Intervall. Es sei*

$$f \colon X \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

eine stetige Funktion. Dann ist auch die Funktion

$$X \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\,dt,$$

stetig.

Beweis. Aufgrund von Satz 34.3 müssen wir für jede konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M mit dem Grenzwert x zeigen, dass die Folge der Integrale

$$\int_a^b f(x_n,t)\,dt$$

gegen

$$\int_a^b f(x,t)\,dt$$

konvergiert. Aufgrund von Lemma 35.1 genügt es zu zeigen, dass die Funktionenfolge $f(x_n,-)$ gleichmäßig gegen $f(x,-)$ konvergiert. Nehmen wir also an, dass diese Folge nicht gleichmäßig konvergiert. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \geq n$ und ein $t_m \in [a,b]$ gibt mit $|f(x_m,t_m) - f(x,t_m)| \geq \epsilon$. So können wir eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit zugehörigen Punkten t_{n_k} konstruieren, die diese Abstandbedingung erfüllen. Wegen Satz 36.2 gibt es zu dieser Folge in $[a,b]$ eine konvergente Teilfolge, und durch Umbennen können wir annehmen, dass die Folge $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, sagen wir gegen $t \in [a,b]$. Wegen der Stetigkeit von f und den Konvergenzeigenschaften gibt es ein k_0 derart, dass für alle $k \geq k_0$ die Abschätzungen $|f(x_{n_k},t_{n_k}) - f(x,t)| \leq \frac{1}{3}\epsilon$ und $|f(x,t_{n_k}) - f(x,t)| \leq \frac{1}{3}\epsilon$ gelten. Damit ist

$$|f(x_{n_k},t_{n_k}) - f(x,t_{n_k})| \leq |f(x_{n_k},t_{n_k}) - f(x,t)| + |f(x,t) - f(x,t_{n_k})| \leq \frac{2\epsilon}{3} < \epsilon,$$

ein Widerspruch. □

Vollständige metrische Räume

In den folgenden Vorlesungen werden wir verstärkt topologische Hilfsmittel verwenden, insbesondere werden wir mit allgemeinen vollständigen Räumen (einschließlich Funktionenräumen) arbeiten. Einem Großteil der folgenden Definition sind wir schon bei Aufgaben begegnet.

Definition 35.3. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem metrischen Raum M heißt *Cauchy-Folge*, wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Zu jedem $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n, m \geq n_0$ die Beziehung

$$d(x_n, x_m) \leq \epsilon$$

gilt.

Definition 35.4. Ein metrischer Raum M heißt *vollständig*, wenn jede Cauchy-Folge in M konvergiert.

Definition 35.5. Es sei

$$f\colon L \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Die Abbildung heißt *Lipschitz-stetig*, wenn es eine reelle Zahl $c \geq 0$ mit

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in L$ gibt.

Eine solche Zahl c heißt *Lipschitz-Konstante*. Lipschitz-stetige Funktionen mit einer Lipschitz-Konstanten < 1 bekommen einen eigenen Namen.

Definition 35.6. Es sei

$$f\colon\ L \longrightarrow M,\ x \longmapsto f(x),$$

eine Abbildung zwischen den metrischen Räumen L und M. Dann heißt f *stark kontrahierend*, wenn es eine nichtnegative reelle Zahl $c < 1$ gibt mit

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in L$.

Die Zahl c nennt man auch einen *Kontraktionsfaktor*.

Definition 35.7. Es sei M eine Menge und

$$f\colon\ M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Ein Element $x \in M$ mit $f(x) = x$ heißt *Fixpunkt* der Abbildung.

Der Banachsche Fixpunktsatz

Satz 35.8. *Es sei M ein nicht-leerer vollständiger metrischer Raum und*

$$f\colon\ M \longrightarrow M$$

eine stark kontrahierende Abbildung. Dann besitzt f genau einen Fixpunkt.

Beweis. Es sei $c \in \mathbb{R}$, $0 \leq c < 1$, ein Kontraktionsfaktor, d.h. es gelte

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$$

für alle $x, y \in M$. Wenn $x, y \in M$ Fixpunkte sind, so folgt aus

$$d(x, y) \ = \ d(f(x), f(y)) \ < \ c \cdot d(x, y)$$

sofort $d(x, y) = 0$ und somit $x = y$, es kann also maximal einen Fixpunkt geben.

Sei nun $x \in M$ ein beliebiger Punkt. Wir betrachten die durch

$$x_0 = x \text{ und } x_n := f^n(x) := f(x_{n-1})$$

rekursiv definierte Folge in M. Wir setzen $a = d(f(x), x)$. Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$d(f^{n+1}(x), f^n(x)) \ \leq \ c \cdot d(f^n(x), f^{n-1}(x)) \ \leq \ c^n \cdot d(f(x), x) \ = \ c^n a.$$

Daher gilt aufgrund der Dreiecksungleichung und der geometrischen Reihe für $n \geq m$ die Beziehung

$$\begin{aligned}
& d(f^n(x), f^m(x)) \\
\leq\ & d(f^n(x), f^{n-1}(x)) + d(f^{n-1}(x), f^{n-2}(x)) + \cdots + d(f^{m+1}(x), f^m(x)) \\
\leq\ & a(c^{n-1} + c^{n-2} + \cdots + c^{m+1} + c^m) \\
=\ & ac^m(c^{n-m-1} + c^{n-m-2} + \cdots + c^2 + c^1 + 1) \\
\leq\ & c^m a \frac{1}{1-c}.
\end{aligned}$$

Zu einem gegebenen $\epsilon > 0$ wählt man n_0 mit $c^{n_0} a \frac{1}{1-c} \leq \epsilon$. Dies zeigt, dass eine Cauchy-Folge vorliegt, die aufgrund der Vollständigkeit gegen ein $y \in M$ konvergiert. Wir zeigen, dass dieses y ein Fixpunkt ist. Die Bildfolge $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $f(y)$, da eine kontrahierende Abbildung stetig ist. Andererseits stimmt diese Bildfolge mit der Ausgangsfolge bis auf die Indizierung überein, so dass der Grenzwert y sein muss. $\square$

Abbildungsverzeichnis