Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2014**

Analysis II

Vorlesung 35

Der Abschluss in einem metrischen Raum

Definition 35.1. Sei (M,d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Ein Punkt $a \in M$ heißt *Berührpunkt* von T, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ der Durchschnitt

$$T \cap U(a,\epsilon) \neq \emptyset .$$

Definition 35.2. Sei (M,d) ein metrischer Raum und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Die Menge aller Berührpunkte von T heißt der *Abschluss* von T. Er wird mit $\overline{T}$ bezeichnet.

Der Abschluss ist eine abgeschlossene Menge, und zwar die kleinste abgeschlossene Menge, die T umfasst.

Grenzwerte von Abbildungen

Definition 35.3. Sei (M,d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge und sei $a \in M$ ein Berührpunkt von T. Es sei

$$f\colon T \longrightarrow L$$

eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum L. Dann heißt $b \in L$ der *Grenzwert* (oder *Limes*) von f in a, wenn es für jedes $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit der folgenden Eigenschaft: Für jedes $x \in T \cap U(a,\delta)$ ist $f(x) \in U(b,\epsilon)$. In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{x \to a} f(x) = b .$$

Wenn der Grenzwert existiert, so ist er eindeutig bestimmt.

Notation 35.4. In der Situation von Definition 35.3 wird der Grenzwert, falls er existiert, mit

$$\lim_{x \in T,\, x \to a} f(x) \text{ bzw. mit } \lim_{x \to a} f(x)$$

bezeichnet.

Lemma 35.5. *Sei (M,d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge und sei $a \in M$ ein Berührpunkt von T. Es sei*

$$f\colon T \longrightarrow M$$

eine Abbildung in einen weiteren metrischen Raum M und sei $b \in M$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(1) *Die Abbildung f besitzt in a den Grenzwert b.*
(2) *Zu jeder offenen Menge $V \subseteq M$ mit $b \in V$ gibt es eine offene Menge $U \subseteq X$ mit $a \in U$ und mit $f(U \cap T) \subseteq V$.*
(3) *Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in T, die gegen a konvergiert, konvergiert die Bildfolge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen b.*

Beweis. (1) $\Rightarrow$ (2). Da V offen ist gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $U(b,\epsilon) \subseteq V$. Aufgrund von (1) gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(T \cap U(a,\delta)) \subseteq U(b,\epsilon)$ und wir können $U = T \cap U(a,\delta)$ nehmen. (2) $\Rightarrow$ (3). Sei eine gegen a konvergente Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in T$ und ein $\epsilon > 0$ gegeben. Für die offene Menge $V = U(b,\epsilon)$ gibt es nach (2) eine offene Menge U mit $a \in U$ und $f(U \cap T) \subseteq V$. Wegen der Offenheit von U gibt es auch ein $\delta > 0$ mit $U(a,\delta) \subseteq U$. Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U(a,\delta)$ für alle $n \geq N$. Für diese n ist dann $f(x_n) \in U(b,\epsilon)$, d.h. die Bildfolge konvergiert. (3) $\Rightarrow$ (1). Nehmen wir an, dass b nicht der Grenzwert ist. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass es für alle $\delta > 0$ ein $x \in T$ gibt mit $x \in U(a,\delta)$ und mit $f(x) \notin U(b,\epsilon)$. Wir wenden diese Eigenschaft auf die Stammbrüche $\delta = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, an und erhalten eine Folge

$$x_n \in U(a, 1/n) \text{ und } f(x_n) \notin U(b,\epsilon) .$$

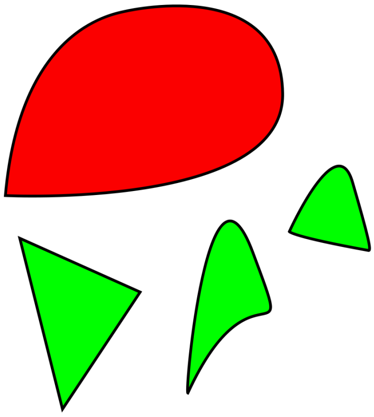
Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert dann gegen x, die Bildfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber nicht gegen b, im Widerspruch zu (3). □

Lemma 35.6. *Sei (M,d) ein metrischer Raum, sei $T \subseteq M$ eine Teilmenge und sei $a \in M$ ein Berührpunkt von T. Es seien $f\colon T \to \mathbb{K}$ und $g\colon T \to \mathbb{K}$ Funktionen derart, dass die Grenzwerte $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a} g(x)$ existieren. Dann gelten folgende Beziehungen.*

(1) *Die Summe $f + g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist*
$$\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) .$$
(2) *Das Produkt $f \cdot g$ besitzt einen Grenzwert in a, und zwar ist*
$$\lim_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) .$$
(3) *Es sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in T$ und $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$. Dann besitzt der Quotient f/g einen Grenzwert in a, und zwar ist*
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} .$$

Beweis. Siehe Aufgabe 35.2. □

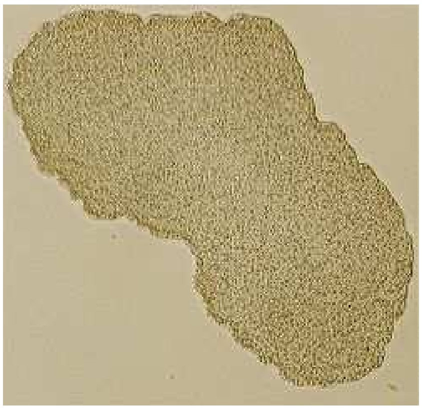
Zusammenhängende Räume



Die rote Menge ist zusammenhängend, die grüne Menge nicht.

Definition 35.7. Ein metrischer Raum heißt *zusammenhängend*, wenn es genau zwei Teilmengen von X gibt (nämlich $\emptyset$ und X selbst), die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Den leeren metrischen Raum bezeichnet man gemäß dieser Definition als nicht zusammenhängend (oder *unzusammenhängend*). Ein nichtleerer nicht zusammenhängender Raum X ist dadurch ausgezeichnet, dass man $X = A \cup B$ als disjunkte Vereinigung schreiben kann, wobei A und B beide nichtleer und in X abgeschlossen (und damit auch beide offen) sind.



Das Tierchen Trichoplax adhaerens hat merkwürdige Zusammenhangseigenschaften. Es ist ein zusammenhängender Vielzeller. Wenn man es durch ein Sieb drückt, so dass die einzelnen Zellen voneinander getrennt werden, entstehen unzusammenhängende Zellen. Diese finden dann aber wieder zueinander und es entsteht erneut ein zusammenhängendes lebendiges Tierchen.

In der folgenden Aussage verstehen wir unter Intervalle auch die (einseitig oder beidseitig) unbeschränkten Intervalle, wie z.B. $[a, +\infty]$.

Satz 35.8. *Sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen. Dann ist T genau dann zusammenhängend, wenn T ein (nichtleeres) Intervall ist.*

Beweis. Sei zuerst T kein Intervall. Wenn T leer ist, so ist T nach Definition nicht zusammenhängend. Sei also $T \neq \emptyset$, aber kein Intervall. Dann gibt es nach Aufgabe 6.10 $x, z \in T$ und $y \notin T$ mit

$$x < y < z\,.$$

Dann ist die Menge

$$A = T \cap\ ]-\infty, y[= T \cap\ ]-\infty, y]$$

sowohl offen als auch abgeschlossen in T, da man A sowohl als Durchschnitt von T mit einem offenen Intervall als auch als Durchschnitt mit einem abgeschlossenen Intervall schreiben kann. Wegen $x \in A$ und $z \notin A$ ist sie weder $\emptyset$ noch T, also ist T nicht zusammenhängend. Sei nun T ein nichtleeres Intervall und sei angenommen, dass es eine Teilmenge $A \subseteq T$ mit $A \neq \emptyset, T$ gibt, die in T sowohl offen als auch abgeschlossen sei. Es sei $x \in A$ und $y \in T$, $y \notin A$. Wir betrachten das (abgeschlossene und beschränkte) Intervall $I = [x, y] \subseteq T$ (ohne Einschränkung sei $x < y$) und setzen $A' = A \cap [x, y]$. Dies ist eine in I offene und abgeschlossene Teilmenge von I, die wegen $x \in A'$ nicht leer ist und wegen $y \notin A'$ nicht ganz I ist. D.h. es genügt, die Behauptung für ein abgeschlossenes und beschänktes Intervall $I = [x, y]$ zu zeigen. Wir betrachten die reelle Zahl $s = \sup(A)$, die wegen Satz 7.5 existiert. Da ein abgeschlossenes Intervall vorliegt, gehört s zu I und aufgrund von Korollar 33.17 ist $s \in A$. Da A aber auch offen in I ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit $[s-\delta, s+\delta] \cap I \subseteq A$. Da s das Supremum von A ist, folgt $s = y$. Die gleiche Argumentation für $I \setminus A$ ergibt $s \in I \setminus A$, ein Widerspruch. ☐

Insbesondere sind also die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zusammenhängend. Dies gilt auch für die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ und für $\mathbb{R}^n$. Für die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ gilt die vorstehende Aussage nicht, dort sind nämlich nur die einpunktigen Intervalle zusammenhängend, alle anderen Intervalle sind in $\mathbb{Q}$ unzusammenhängend, da es zwischen zwei rationalen Zahlen stets irrationale Zahlen gibt, mit deren Hilfe man Teilmenge definieren kann, die zugleich offen als auch abgeschlossen sind.

Zusammenhängende Räume und stetige Abbildungen

Satz 35.9. *Seien L und M metrische Räume und sei*

$$f\colon L \longrightarrow M$$

eine stetige Abbildung. Es sei $S \subseteq L$ eine zusammenhängende Teilmenge. Dann ist auch das Bild

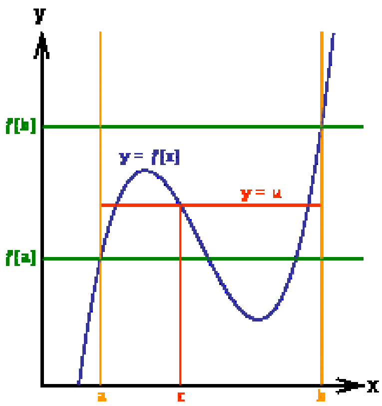
$$f(S)$$

zusammenhängend.

Beweis. Sei $f(S) = T$ und $A \subseteq T$ eine offene und abgeschlossene Teilmenge, die weder leer noch ganz T sei. Die eingeschränkte Abbildung

$$f \colon S \longrightarrow T$$

ist ebenfalls stetig, und sie ist auch surjektiv. Daher ist $f^{-1}(A)$ eine offene und abgeschlossene Teilmenge in S, die ebenfalls weder leer noch ganz S ist, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass S zusammenhängend ist. $\square$



Daraus ergibt sich auch ein neuer Beweis für den Zwischenwertsatz aus Analysis I.

Wegzusammenhängende Räume

Definition 35.10. Ein nichtleerer metrischer Raum X heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine stetige Abbildung

$$\gamma \colon [a, b] \longrightarrow X$$

gibt mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$.

Lemma 35.11. *Ein wegzusammenhängender metrischer Raum ist zusammenhängend*

Beweis. Nehmen wir an, es gäbe eine Zerlegung $X = U_1 \uplus U_2$ in zwei nichtleere offene Teilmenge U_1 und U_2. Sei $x_1 \in U_1$ und $x_2 \in U_2$. Nach Voraussetzung gibt es eine stetige Abbildung

$$\gamma \colon [a, b] \longrightarrow X$$

mit $\gamma(a) = x_1$ und $\gamma(b) = x_2$. Dann ist

$$[a,b] \,=\, \gamma^{-1}(U_1) \uplus \gamma^{-1}(U_2)$$

eine disjunkte Zerlegung eines Intervalls in zwei nichtleere offene Mengen im Widerspruch zu Fakt *****. $\square$

Mit dieser Aussage lässt sich häufig zeigen, dass gewisse Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ zusamenhängend sind. Beispielsweise ist der $\mathbb{R}^n$ selbst sowie die offenen und abgeschlossenen Kugeln darin zusammenhängend, siehe Aufgabe *****.

LEMMA 35.12. *Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Dann ist U genau dann zusammenhängend, wenn U wegzusammenhängend ist.*

Beweis. Die eine Richtung folgt aus Lemma 35.11. Für die andere Richtung sei U zusammenhängend. Zu einem Punkt $x \in U$ betrachten wir die Menge

$$Z(x) \,=\, \{y \in U |\text{ Es gibt einen stetigen Weg von } x \text{ nach } y\}\,.$$

Diese Menge ist offen, da offene Bälle wegzusammenhängend sind und man stetige Wege aneinander legen kann. Aus diesem Grund ist für zwei Punkte $x_1, x_2 \in U$ entweder $Z(x_1) \,=\, Z(x_2)$ oder aber $Z(x_1) \cap Z(x_2) \,=\, \emptyset$. Wenn U nicht wegzusammenhängend wäre, so wäre $U \,\neq\, Z(x)$ und es gäbe eine Zerlegung

$$U \,=\, Z(x) \uplus \bigcup_{y \notin Z(x)} Z(y)$$

in nichtleere offene Teilmengen im Widerspruch zum Zusammenhang. $\square$

Für nicht offene Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ gilt die vorstehende Äquivalenz nicht, siehe Aufgabe 35.8.

Abbildungsverzeichnis