Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Vorkurs Mathematik

Vorlesung 4

Zifferndarstellung reeller Zahlen

Die Zifferndarstellung (oder Ziffernentwicklung) einer natürlichen Zahl haben wir bereits besprochen, für eine negative Zahl nimmt man einfach die zugehörige positive Zahl und schreibt ein Minuszeichen davor. Die zu einer Ziffernfolge gehörende Zahl gewinnt man, indem man aus der Ziffernfolge eine Vorschrift herausliest, was zu addieren, was zu multiplizieren, und was zu potenzieren ist (wobei Potenzieren eine bestimmte Form der Multiplikation ist). Beispielsweise ist die Ziffernfolge

$$5071$$

zu verstehen als

$$5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 .$$

Man muss also lediglich die Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ und die Zahl 10 sowie Addition und Multiplikation kennen, um die Ziffernfolge richtig zu interpretieren. Die Zifferndarstellung beruht also auf einer Kodierung von Rechenvorschriften. Die Operationen Addition und Multiplikation sollte man dabei als fundamentaler für die Zahlen ansehen als das Ziffernsystem, das lediglich eine geschickte Benennung darstellt.

Für reelle Zahlen gibt es ebenfalls eine solche Ziffernentwicklung, wobei diese allerdings im Allgemeinen mit unendlich vielen Ziffern beschrieben wird. Die Bedeutung dieser Ziffernentwicklung ergibt sich im Kontext von Folgen und Reihen in Zusammenhang mit der sogenannten *Vollständigkeit* der reellen Zahlen. Es ist nicht möglich, eine Ziffernfolge als reelle Zahl allein mittels Addition und Multiplikation zu interpretieren.

Wir betrachten zunächst eine abbrechende Ziffernentwicklung, wobei wir uns erstmal auf das Dezimalsystem beschränken. Es sei die Zahl

$$x = 5071,89826$$

gegeben. Sie ist zu interpretieren als die Zahl

$$5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} + 6 \cdot 10^{-5} .$$

Hier schreiben wir 10^{-k} statt $\frac{1}{10^k}$. Diese Zahl kann man auch direkt als Bruch

$$\frac{507189826}{10000}$$

auffassen. Um also eine abbrechende Ziffernfolge richtig als Zahl zu interpretieren, muss man addieren, multiplizieren und auch durch Zehnerpotenzen teilen können.

Welche Bedeutung hat nun eine unendliche Ziffernentwicklung, wie

$$x = 5071,89802649511160350095368527351203476006836203451723487...$$

Zunächst mal gar keine, da ja gar nicht klar ist, was mit den Punkten zum Schluss gemeint ist, wie die Zifferndarstellung weiter geht. Eine solche Schreibweise ergibt allenfalls dann Sinn, wenn in den angeführten Ziffern ein Muster erkennbar ist, dessen Fortführung ins Unendliche dann die vollständige Ziffernfolge festlegt, wie bei

$$y = 5071,898089808980898089808980898089808980898089808980...$$

oder bei

$$z = 5071,0101101110111101111101111110...$$

Man kann ein Bildungsgesetz für die unendlich vielen Ziffern auf jede beliebige Weise angeben, solange nur jede Ziffer einen eindeutigen Wert bekommt.

Es sei jetzt eine irgendwie festgelegte unendliche Ziffernfolge gegeben. Welche Zahl verbirgt sich dahinter? Bei den abbrechenden Zahlen haben wir schon verwendet, dass die k-te Nachkommastelle den Wert $10^{-k} = \left(\frac{1}{10}\right)^k$ repräsentiert. Nach dem oben angeführten Gesetz, wie eine Ziffernfolge als Zahl zu interpretieren ist, sollte eine Ziffernfolge

$$0, z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 ...$$

als

$$z_1 10^{-1} + z_2 10^{-2} + z_3 10^{-3} + z_4 10^{-4} + z_5 10^{-5} + z_6 10^{-6} + \cdots$$

zu interpretieren sein. Dies ist eine „unendliche Summe“, und sowas ist *nicht* definiert. Ausdrücke wie

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$$

oder

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots$$

lassen erkennen, dass man auch keine sinnvolle Interpretation für beliebige unendliche Summen erwarten darf. Allerdings ist es möglich, und zwar unter sehr restriktiven Voraussetzungen, gewisse unendliche Summen in sinnvoller Weise als reelle Zahlen zu interpretieren. Dies benötigt einige Vorbereitungen, doch dadurch werden letztlich auch die unendlichen Dezimalentwicklungen gerechtfertigt.

Mit der Interpretation der k-ten Nachkommastelle als 10^{-k} (bzw. $z_k 10^{-k}$), die ja mit wachsendem k kleiner werden, hängt zusammen, dass zu einer unendlichen Ziffernfolge die abgeschnittene Ziffernfolge bis zur k-ten Nachkommastelle eine *Approximation* der Zahl liefert, und dass mit wachsendem k die Approximationen immer besser werden. Für die Ziffernfolge

$$x = 5071,0101101110111101111101111110111111 0$$

sind also

$$x_0 = 5071\,,$$

$$x_1 = 5071,0$$

$$x_2 = 5071,01$$

$$x_3 = 5071,010$$

$$x_4 = 5071,0101$$

$$x_5 = 5071,01011$$

$$x_6 = 5071,010110$$

$$x_7 = 5071,0101101$$

zunehmend bessere Approximationen (wenn eine 0 dazukommt, kann man sich darüber streiten). All diese x_i sind rationale Zahlen, die zunehmend genauere Information über die durch die unendliche Ziffernfolge anvisierte Zahl beinhalten. Wir können also Ziffernfolgen als eine Folge von Approximationen auffassen. Eine fundamentale Beobachtung ist nun, dass Ziffernfolgen im Allgemeinen nicht die schnellste oder die beste Approximation einer Zahl geben, sondern dass häufig anders gelagerte Folgen besser sind. Deshalb werden die Approximationseigenschaften der reellen Zahlen über die fundamentalen Begriffe *Folge* und *Konvergenz* erfasst.

Heron von Alexandria (1. Jahrhundert n.C.)

Reelle Zahlenfolgen

Wir betrachten nun ein Beispiel, das ebenfalls zu Approximationen führt, aber nichts mit der Dezimalbruchentwicklung zu tun hat, nämlich Quadratwurzeln aus natürlichen (oder reellen) Zahlen. Die Quadratwurzel zu $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist diejenige (eindeutig bestimmte) reelle nichtnegative Zahl, deren Quadrat a ergibt. Innerhalb der rationalen Zahlen gibt es keine Wurzeln, so dass dies ein deutlicher Hinweis ist, dass sich viele Rechenoperationen nicht innerhalb der rationalen Zahlen durchführen lassen. Siehe Aufgabe 3.8 und Aufgabe 3.9.

Beispiel 4.1. Wir wollen die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl „berechnen“, sagen wir von 5. Eine solche Zahl x mit der Eigenschaft $x^2 = 5$ gibt es nicht innerhalb der rationalen Zahlen, wie aus der eindeutigen Primfaktorzerlegung folgt. Wenn $x \in \mathbb{R}$ ein solches Element ist, so hat auch $-x$ diese Eigenschaft. Mehr als zwei Lösungen kann es aber nach Aufgabe 4.5 nicht geben, so dass wir nur nach der positiven Lösung suchen müssen.

Obwohl es innerhalb der rationalen Zahlen keine Lösung für die Gleichung $x^2 = 5$ gibt, so gibt es doch beliebig gute Approximationen innerhalb der rationalen Zahlen dafür. Beliebig gut heißt dabei, dass der Fehler (oder die Abweichung) unter jede positive Schranke gedrückt werden kann. Das klassische Verfahren, um eine Quadratwurzel beliebig anzunähern, ist das *Heron-Verfahren*, das man auch *babylonisches Wurzelziehen* nennt. Dies ist ein *iteratives Verfahren*, d.h., die nächste Approximation wird aus den vorausgehenden Approximationen berechnet. Beginnen wir mit $a := x_0 := 2$ als erster Näherung. Wegen

$$x_0^2 = 2^2 = 4 < 5$$

ist x_0 zu klein, d.h. es ist $x_0 < x$. Aus $a^2 < 5$ (mit a positiv) folgt zunächst $5/a^2 > 1$ und daraus $(5/a)^2 > 5$, d.h. $5/a > \sqrt{5}$. Man hat also die Abschätzungen

$$a < \sqrt{5} < 5/a\,,$$

wobei rechts eine rationale Zahl steht, wenn links eine rationale Zahl steht. Eine solche Abschätzung vermittelt offenbar eine quantitative Vorstellung darüber, wo $\sqrt{5}$ liegt. Die Differenz $5/a - a$ ist ein Maß für die Güte der Approximation.

Beim Startwert 2 ergibt sich, dass die Quadratwurzel von $\sqrt{5}$ zwischen 2 und $5/2$ liegt. Man nimmt nun das arithmetische Mittel der beiden Intervallgrenzen, also

$$x_1 := \frac{2+\frac{5}{2}}{2} = \frac{9}{4}.$$

Wegen $\left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} > 5$ ist dieser Wert zu groß und daher liegt $\sqrt{5}$ im Intervall $[5\cdot\frac{4}{9}, \frac{9}{4}]$. Von diesen Intervallgrenzen nimmt man erneut das arithmetische Mittel und setzt

$$x_2 := \frac{5\cdot\frac{4}{9}+\frac{9}{4}}{2} = \frac{161}{72}$$

als nächste Approximation. So fortfahrend erhält man eine immer besser werdende Approximation von $\sqrt{5}$.

Allgemein ergibt sich das folgende Heron-Verfahren.

Beispiel 4.2. Beim *Heron-Verfahren* zur Berechnung von $\sqrt{c}$ einer positiven Zahl c geht man iterativ wie folgt vor. Man startet mit einem beliebigen positiven Startwert x_0 und berechnet davon das arithmetische Mittel aus x_0 und c/x_0. Dieses Mittel nennt man x_1. Es gilt

$$x_1^2 - c = \left(\frac{x_0+\frac{c}{x_0}}{2}\right)^2 - c = \frac{x_0^2+2c+\frac{c^2}{x_0^2}}{4} - c = \frac{x_0^2-2c+\frac{c^2}{x_0^2}}{4} = \left(\frac{x_0-\frac{c}{x_0}}{2}\right)^2 \geq 0.$$

D.h. dass x_1 mindestens so groß wie $\sqrt{c}$ ist. Auf x_1 wendet man iterativ das gleiche Verfahren an und erhält so x_2 usw. Die Definition von x_{n+1} lautet also

$$x_{n+1} = \frac{x_n + c/x_n}{2}\,.$$

Nach Konstuktion weiß man, dass $\sqrt{c}$ in jedem Intervall $[c/x_n, x_n]$ (für $n \geq 1$) liegt, da aus $x_n^2 \geq c$ und $x_n \cdot c/x_n = c$ folgt, dass $\left(\frac{c}{x_n}\right)^2 \leq c$ ist. Bei jedem Schritt gilt

$$[\frac{c}{x_{n+1}}, x_{n+1}] \subseteq [\frac{c}{x_n}, x_n]\,,$$

d.h. das Nachfolgerintervall liegt innerhalb des Vorgängerintervalls. Dabei wird bei jedem Schritt die Intervalllänge mindestens halbiert.

Das eben beschriebene Verfahren liefert also zu jeder natürlichen Zahl n eine reelle Zahl, die eine durch eine gewisse algebraische Eigenschaft charakterisierte Zahl beliebig gut approximiert. Bei vielen technischen Anwendungen genügt es, gewisse Zahlen nur hinreichend genau zu kennen, wobei allerdings die benötigte Güte der Approximation von der technischen Zielsetzung abhängt. Es gibt im Allgemeinen keine Güte, die für jede vorstellbare Anwendung ausreicht, so dass es wichtig ist zu wissen, wie man eine gute Approximation durch eine bessere Approximation ersetzen kann und wie viele Schritte man machen muss, um eine gewünschte Approximation zu erreichen. Dies führt zu den Begriffen Folge und Konvergenz.

Definition 4.3. Eine *reelle Folge* ist eine Abbildung

$$\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R},\ n \longmapsto x_n.$$

Eine Folge wird zumeist als $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, oder einfach nur kurz als $(x_n)_n$ geschrieben. Manchmal sind Folgen nicht für alle natürlichen Zahlen definiert, sondern nur für alle natürlichen Zahlen $\geq N$. Alle Begriffe und Aussagen lassen sich dann sinngemäß auch auf diese Situation übertragen. Grundsätzlich gibt es Folgen in jeder Menge, für die meisten Eigenschaften, für die man sich im Kontext von Folgen interessiert, braucht man aber eine zusätzliche „topologische Struktur“, wie sie in $\mathbb{R}$ existiert. Dies gilt insbesondere für den folgenden Begriff.

Definition 4.4. Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge und es sei $x \in \mathbb{R}$. Man sagt, dass die Folge gegen x *konvergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jedem positiven $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$|x_n - x| \leq \epsilon$$

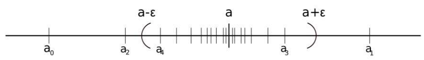
gilt. In diesem Fall heißt x der *Grenzwert* oder der *Limes* der Folge. Dafür schreibt man auch

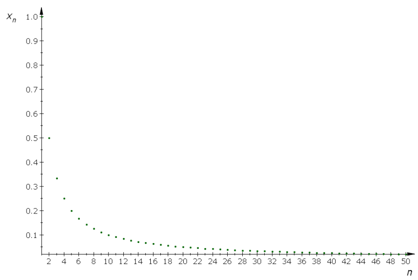
$$\lim_{n\to\infty} x_n := x\,.$$

Wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, so sagt man auch, dass sie *konvergiert* (ohne Bezug auf einen Grenzwert), andernfalls, dass sie *divergiert*.

Man sollte sich dabei das vorgegebene ϵ als eine kleine, aber positive Zahl vorstellen, die eine gewünschte *Zielgenauigkeit* (oder erlaubten Fehler) ausdrückt. Die natürliche Zahl n_0 ist dann die *Aufwandszahl*, die beschreibt, wie weit man gehen muss, um die gewünschte Zielgenauigkeit zu erreichen, und zwar so zu erreichen, dass alle ab n_0 folgenden Glieder innerhalb dieser Zielgenauigkeit bleiben. Konvergenz bedeutet demnach, dass man jede gewünschte Genauigkeit bei hinreichend großem Aufwand auch erreichen kann. Je kleiner der Fehler, also je besser die Approximation sein soll, desto höher ist im Allgemeinen der Aufwand. Statt mit beliebigen positiven reellen Zahlen ϵ kann man auch mit den *Stammbrüchen*, also den rationalen Zahlen $\frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}_+$, arbeiten, siehe Aufgabe 4.7.

Zu einem $\epsilon > 0$ und einer reellen Zahl x nennt man das Intervall $]x - \epsilon, x + \epsilon[$ auch die ϵ-*Umgebung* von x. Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt *Nullfolge*.





Beispiel 4.5. Eine *konstante Folge* $x_n := c$ ist stets konvergent mit dem Grenzwert c. Dies folgt direkt daraus, dass man für jedes $\epsilon > 0$ als Aufwandszahl $n_0 = 0$ nehmen kann. Es ist ja

$$|x_n - c| \;=\; |c - c| \;=\; |0| \;=\; 0 \;<\; \epsilon$$

für alle n.

Die Folge

$$x_n = \frac{1}{n}$$

ist konvergent mit dem Grenzwert 0. Sei dazu ein beliebiges positives ϵ vorgegeben. Aufgrund des Archimedes Axioms gibt es ein n_0 mit $\frac{1}{n_0} \leq \epsilon$. Insgesamt gilt damit für alle $n \geq n_0$ die Abschätzung

$$x_n \;=\; \frac{1}{n} \;\leq\; \frac{1}{n_0} \;\leq\; \epsilon.$$

Lemma 4.6. *Eine reelle Folge besitzt maximal einen Grenzwert.*

Beweis. Nehmen wir an, dass es zwei verschiedene Grenzwerte x, y, $x \neq y$, gibt. Dann ist $d := |x - y| > 0$. Wir betrachten $\epsilon := d/3 > 0$. Wegen der Konvergenz gegen x gibt es ein n_0 mit

$$|x_n - x| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0$$

und wegen der Konvergenz gegen y gibt es ein n_0' mit

$$|x_n - y| \leq \epsilon \text{ für alle } n \geq n_0' \,.$$

Beide Bedingungen gelten dann gleichermaßen für $n \geq \max\{n_0, n_0'\}$. Sei n mindestens so groß wie dieses Maximum. Dann ergibt sich aufgrund der Dreiecksungleichung der Widerspruch

$$d = |x - y| \leq |x - x_n| + |x_n - y| \leq \epsilon + \epsilon = 2d/3.$$

□

Rechenregeln für Folgen

LEMMA 4.7. *Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen. Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Die Folge $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) + \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) .$$

(2) *Die Folge $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) .$$

(3) *Für $c \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} c x_n = c\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) .$$

(4) *Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{1}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x} .$$

(5) *Es sei $\lim_{n\to\infty} x_n = x \neq 0$ und $x_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent mit*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{x} .$$

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Abbildungsverzeichnis