Prof. Dr. H. Brenner　　　　Osnabrück WS 2013/2014

Analysis I

Arbeitsblatt 3

Übungsaufgaben

Aufgabe 3.1. Zeige, und zwar allein unter Bezug auf Rechengesetze in $\mathbb{Z}$, dass die durch

(1)
$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} := \frac{ab}{cd}$$

(2)
$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} := \frac{ad+bc}{cd}$$

definierte Addition und Multiplikation auf den rationalen Zahlen wohldefiniert ist, und dass die Assoziativität, die Kommutativität und das Distributivgesetz gelten.

Aufgabe 3.2. Es seien x, y, z, w Elemente in einem Körper, wobei z und w nicht null seien. Beweise die folgenden Bruchrechenregeln.

(1)
$$\frac{x}{1} = x\,,$$

(2)
$$\frac{1}{-1} = -1\,,$$

(3)
$$\frac{0}{z} = 0\,,$$

(4)
$$\frac{z}{z} = 1\,,$$

(5)
$$\frac{x}{z} = \frac{xw}{zw}\,,$$

(6)
$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw}\,,$$

(7)
$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw + yz}{zw}\,.$$
Gilt die zu (7) analoge Formel, die entsteht, wenn man Addition mit Multiplikation (und Subtraktion mit Division) vertauscht, also
$$(x - z) \cdot (y - w) = (x + w) \cdot (y + z) - (z + w)\,?$$
Zeige, dass die „beliebte Formel“
$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x + y}{z + w}$$
nicht gilt.

Aufgabe 3.3. Zeige, dass in einem Körper das „umgekehrte Distributivgesetz“, also
$$a + (bc) = (a + b) \cdot (a + c)\,,$$
nicht gilt.

Aufgabe 3.4. Beschreibe und beweise Regeln für die Addition und die Multiplikation von geraden und ungeraden ganzen Zahlen. Man definiere auf der zweielementigen Menge
$$\{G, U\}$$
eine „Addition“ und eine „Multiplikation“, die diese Regeln „repräsentieren“.

Aufgabe 3.5. Zeige, dass die einelementige Menge $\{0\}$ alle Körperaxiome erfüllt mit der einzigen Ausnahme, dass $0 = 1$ ist.

Aufgabe 3.6. Zeige, dass die Binomialkoeffizienten die rekursive Bedingung
$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$
erfüllen.

Aufgabe 3.7. Zeige, dass die Binomialkoeffizienten natürliche Zahlen sind.

Aufgabe 3.8. Beweise die Formel
$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\,.$$

Aufgabe 3.9.*

Es sei M eine n-elementige Menge. Zeige, dass die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von M gleich dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k}$$

ist.

Aufgabe 3.10.*

Beweise durch Induktion, dass für $n \geq 10$ die Abschätzung

$$3^n \geq n^4$$

gilt.

Aufgabe 3.11.*

Zeige, dass für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Abschätzung

$$3^n \geq n^3$$

gilt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 3.12. (3 Punkte)

Wir betrachten die Menge

$$K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(a, b) | \, a, b \in \mathbb{Q}\}$$

mit den beiden ausgezeichneten Elementen

$$0 = (0, 0) \text{ und } 1 = (1, 0)\,,$$

der Addition

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

und der Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)\,.$$

Zeige, dass K mit diesen Operationen ein Körper ist.

Aufgabe 3.13. (3 Punkte)

Beweise das allgemeine Distributivgesetz für einen Körper.

Aufgabe 3.14. (3 Punkte)

Beweise die Formel

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} .$$