

**Analysis I****Arbeitsblatt 3****Übungsaufgaben**

AUFGABE 3.1. Zeige, und zwar allein unter Bezug auf Rechengesetze in  $\mathbb{Z}$ , dass die durch

(1)

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} := \frac{ab}{cd}$$

(2)

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} := \frac{ad + bc}{cd}$$

definierte Addition und Multiplikation auf den rationalen Zahlen wohldefiniert ist, und dass die Assoziativität, die Kommutativität und das Distributivgesetz gelten.

AUFGABE 3.2. Es seien  $x, y, z, w$  Elemente in einem Körper, wobei  $z$  und  $w$  nicht null seien. Beweise die folgenden Bruchrechenregeln.

(1)

$$\frac{x}{1} = x,$$

(2)

$$\frac{1}{-1} = -1,$$

(3)

$$\frac{0}{z} = 0,$$

(4)

$$\frac{z}{z} = 1,$$

(5)

$$\frac{x}{z} = \frac{xw}{zw},$$

(6)

$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw},$$

(7)

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw + yz}{zw}.$$

Gilt die zu (7) analoge Formel, die entsteht, wenn man Addition mit Multiplikation (und Subtraktion mit Division) vertauscht, also

$$(x - z) \cdot (y - w) = (x + w) \cdot (y + z) - (z + w)?$$

Zeige, dass die „beliebte Formel“

$$\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{x + y}{z + w}$$

nicht gilt.

AUFGABE 3.3. Zeige, dass in einem Körper das „umgekehrte Distributivgesetz“, also

$$a + (bc) = (a + b) \cdot (a + c),$$

nicht gilt.

AUFGABE 3.4. Beschreibe und beweise Regeln für die Addition und die Multiplikation von geraden und ungeraden ganzen Zahlen. Man definiere auf der zweielementigen Menge

$$\{G, U\}$$

eine „Addition“ und eine „Multiplikation“, die diese Regeln „repräsentieren“.

AUFGABE 3.5. Zeige, dass die einelementige Menge  $\{0\}$  alle Körperaxiome erfüllt mit der einzigen Ausnahme, dass  $0 = 1$  ist.

AUFGABE 3.6. Es sei  $K$  ein Körper. Zeige, dass man jeder natürlichen Zahl  $n \in \mathbb{N}$  ein Körperelement  $n_K$  zuordnen kann, so dass  $0_K$  das Nullelement in  $K$  und  $1_K$  das Einselement in  $K$  ist und so dass

$$(n + 1)_K = n_K + 1_K$$

gilt. Zeige, dass diese Zuordnung die Eigenschaften

$$(n + m)_K = n_K + m_K \text{ und } (nm)_K = n_K \cdot m_K$$

besitzt.

Erweitere diese Zuordnung auf die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$  und zeige, dass die angeführten strukturellen Eigenschaften dann ebenfalls gelten.

AUFGABE 3.7. Skizziere den Graph der reellen Addition

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x + y,$$

und den Graph der reellen Multiplikation

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x \cdot y.$$

## AUFGABE 3.8.\*

Zwei Personen,  $A$  und  $B$ , liegen unter einer Palme,  $A$  besitzt 2 Fladenbrote und  $B$  besitzt 3 Fladenbrote. Eine dritte Person  $C$  kommt hinzu, die kein Fladenbrot besitzt, aber 5 Taler. Die drei Personen werden sich einig, für die 5 Taler die Fladenbrote untereinander gleichmäßig aufzuteilen. Wie viele Taler gibt  $C$  an  $A$  und an  $B$ ?

AUFGABE 3.9. Man gebe die Antworten als Bruch (bezogen auf das angegebene Vergleichsmaß): Um wie viel ist eine drei Viertel Stunde länger als eine halbe Stunde, und um wie viel ist eine halbe Stunde kürzer als eine drei Viertel Stunde?

AUFGABE 3.10. Man erläutere die Uhrzeitangaben „halb fünf“, „viertel fünf“, „drei viertel fünf“. Was würde „ein sechstel fünf“ und „drei siebtel fünf“ bedeuten?

AUFGABE 3.11. Zeige, dass die Binomialkoeffizienten die rekursive Bedingung

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

erfüllen.

AUFGABE 3.12. Zeige, dass die Binomialkoeffizienten natürliche Zahlen sind.

AUFGABE 3.13. Beweise die Formel

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

## AUFGABE 3.14.\*

Es sei  $M$  eine  $n$ -elementige Menge. Zeige, dass die Anzahl der  $k$ -elementigen Teilmengen von  $M$  gleich dem Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k}$$

ist.

## AUFGABE 3.15.\*

Beweise durch Induktion, dass für  $n \geq 10$  die Abschätzung

$$3^n \geq n^4$$

gilt.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 3.16. (2 Punkte)

Zeige für einen Körper  $K$  die folgenden Eigenschaften.

(1) Für jedes  $a \in K$  ist die Abbildung

$$\alpha_a: K \longrightarrow K, x \longmapsto x + a,$$

bijektiv.

(2) Für jedes  $b \in K, b \neq 0$ , ist die Abbildung

$$\mu_b: K \longrightarrow K, x \longmapsto bx,$$

bijektiv.

AUFGABE 3.17. (3 Punkte)

Beweise das allgemeine Distributivgesetz für einen Körper.

AUFGABE 3.18. (3 Punkte)

Zeige, dass die „Rechenregel“

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

bei  $a, c \in \mathbb{N}_+$  (und  $b, d \neq 0$ ) niemals gilt. Man gebe ein Beispiel mit  $a, b, c, d \neq 0$ , wo diese Regel gilt.

AUFGABE 3.19. (3 Punkte)

Wir betrachten die Menge

$$K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

mit den beiden ausgezeichneten Elementen

$$0 = (0, 0) \text{ und } 1 = (1, 0),$$

der Addition

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d)$$

und der Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Zeige, dass  $K$  mit diesen Operationen ein Körper ist.

AUFGABE 3.20. (3 Punkte)

Beweise die Formel

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$$