**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2010/2011**

# Mathematik III

## Arbeitsblatt 73

### Aufwärmaufgaben

Aufgabe 73.1. Bestimme das Volumen einer gleichseitigen Pyramide (eines *Tetraeders*) mit Seitenlänge 1.

Aufgabe 73.2. Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn der Sinusbogen zwischen 0 und $\pi$ um die $x$-Achse gedreht wird.

Aufgabe 73.3. Bestimme das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn die Standardparabel um die $y$-Achse gedreht wird und dies mit der Ebene zu $z = h$ „gedeckelt“ wird, in Abhängigkeit von $h \geq 0$.

Aufgabe 73.4. Berechne das Volumen der Einheitskugel mit dem Cavalieri-Prinzip.

Aufgabe 73.5. Fasse die Einheitskugel als Rotationskörper auf und berechne damit ihr Volumen.

Aufgabe 73.6. Wo liegt der Fehler in Beispiel 73.7?

Aufgabe 73.7. Diskutiere den Wikipediaartikel „Prinzip von Cavalieri“, insbesondere in Hinblick auf die Formulierung:

„Aus dem Prinzip von Cavalieri lässt sich herleiten, dass das Volumen eines 'höhengedehnten' Körpers (bei gleichbleibender Grundfläche) proportional zu seiner Höhe ist. Als Beispiel: Ein Körper, dessen Höhe auf diese Weise verdoppelt wird, kann durch 2 gleiche Ausgangskörper konstruiert werden, indem zuerst alle äquivalenten Schnittflächen zusammengelegt werden und diese in der entsprechenden Reihenfolge des Ausgangskörpers aufgeschichtet werden (beide Ausgangskörper werden quasi ineinandergeschoben).“ (Version vom 29. November 2010).

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 73.8. (5 Punkte)

Es sei $K$ die Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt in $(0, R)$ und dem Radius $0 < r < R$. Berechne das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn sich $K$ um die $x$-Achse dreht.

Aufgabe 73.9. (6 Punkte)

Es sei $V$ der Viertelkreis mit dem Mittelpunkt in $(1, 0)$, dem Radius 1 und den Eckpunkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$. Berechne das Volumen des „runden Trichters“, der entsteht, wenn man $V$ um die $y$-Achse dreht.

Aufgabe 73.10. (5 Punkte)

Es sei $D$ das Dreieck mit den Eckpunkten $(3, 4)$, $(5, 5)$ und $(4, 6)$. Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man $D$ um die $x$-Achse dreht.

Aufgabe 73.11. (4 Punkte)

Berechne das Volumen des Kegels, dessen Spitze in $(2, 3, 5)$ liegt und dessen Grundfläche die durch

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\, 3x^2 + 2y^2 = 4\}$$

gegebene Ellipse ist.

Aufgabe 73.12. (8 Punkte)

Es sei $\mu = \varphi_* \lambda^2$ das Bildmaß unter der Multiplikation

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto xy.$$

Zeige, dass für jede Borelmenge $T \subseteq \mathbb{R}$

$$\mu(T) = \begin{cases} 0, \text{ falls } \lambda^1(T) = 0\,, \\ \infty, \text{ falls } \lambda^1(T) > 0\,, \end{cases}$$

gilt.

# Abbildungsverzeichnis