

Vorkurs Mathematik**Arbeitsblatt 5****Übungsaufgaben**

AUFGABE 5.1. Man gebe ein Beispiel für eine Cauchy-Folge in \mathbb{Q} , die (in \mathbb{Q}) nicht konvergiert.

AUFGABE 5.2. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende reelle Folge, die nach oben beschränkt ist. Es gelte also $x_m \leq x_n$ für $m \leq n$ und $x_n \leq b$ für alle n und eine gewisse reelle Zahl b . Zeige, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.

AUFGABE 5.3. Sei $a \in \mathbb{R}$ eine nichtnegative reelle Zahl und $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Zeige, dass die rekursiv definierte Folge mit

$$x_{n+1} := \frac{x_n + a/x_n}{2}$$

gegen \sqrt{a} konvergiert.

AUFGABE 5.4. Es sei I_n , $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in \mathbb{R} . Zeige, dass der Durchschnitt

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

aus genau einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ besteht.

AUFGABE 5.5. Es sei I_n , $n \in \mathbb{N}$, eine Intervallschachtelung in \mathbb{R} und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $x_n \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass diese Folge gegen die durch die Intervallschachtelung bestimmte Zahl konvergiert.

AUFGABE 5.6.*

Es sei x eine reelle Zahl, von welcher der Beginn der Dezimalbruchentwicklung gleich

$$0,3333333333\dots$$

(die weiteren Ziffern sind nicht bekannt). Was kann man über die Dezimalbruchentwicklung von $3x$ sagen? In welchem (möglichst kleinen) Intervall liegt $3x$?

AUFGABE 5.7. Zeige, dass für eine rationale Zahl $x = \frac{a}{b} \in [0, 1[$ das Rekursionsschema aus Satz 5.7 die Eigenschaft besitzt, dass $s_i = \frac{r_i}{b}$ ein Bruch mit b als Nenner ist und dass die Beziehung

$$a10^i = bq_i + r_i$$

mit

$$q_i = \sum_{j=1}^i z_j 10^{i-j}$$

gilt.

AUFGABE 5.8. Bestimme die Dezimalentwicklung von $\frac{5}{7}$ anhand des in Satz 5.7 besprochenen Rekursionsschemas.

AUFGABE 5.9. Bestimme die rationale Zahl, die im Dezimalsystem durch

$$0,11\overline{05}$$

gegeben ist.

AUFGABE 5.10. Bestimme die Ziffernentwicklung im Dualsystem derjenigen reellen Zahl, die im Dezimalsystem durch $0,3$ gegeben ist.

AUFGABE 5.11. Bestimme die Ziffernentwicklung im Dreiersystem derjenigen reellen Zahl, die im Dezimalsystem durch $0,1\overline{7}$ gegeben ist.

AUFGABE 5.12. Die beiden reellen Zahlen x und y seien durch ihre Dezimalbruchentwicklung

$$x = 0, z_1 z_2 z_3 \dots$$

und

$$y = 0, u_1 u_2 u_3 \dots$$

gegeben. Man gebe unter Bezug auf diese Ziffernentwicklungen eine Folge mit rationalen Gliedern an, die gegen xy konvergiert.

AUFGABE 5.13. Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen und

$$x_n = \frac{f_n}{f_{n-1}}.$$

Zeige, dass diese Folge in \mathbb{R} konvergiert und dass der Grenzwert x die Bedingung

$$x = 1 + x^{-1}$$

erfüllt. Berechne daraus x .

Tipp: Zeige zuerst mit Hilfe der Simpson-Formel, dass man mit diesen Brüchen eine Intervallschachtelung basteln kann.

AUFGABE 5.14. Es seien $b > a > 0$ positive reelle Zahlen. Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $x_0 = a$, $y_0 = b$ und durch

$$x_{n+1} = \text{geometrisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n,$$

$$y_{n+1} = \text{arithmetisches Mittel von } x_n \text{ und } y_n.$$

Zeige, dass $[x_n, y_n]$ eine Intervallschachtelung ist.