Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2012/2013**

Invariantentheorie

Arbeitsblatt 16

Aufwärmaufgaben

Aufgabe 16.1. Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Zeige, dass die Skalarmultiplikation

$$R \times M \longrightarrow M,\ (r,m) \longmapsto rm,$$

R-bilinear ist.

Aufgabe 16.2. Es sei R ein kommutativer Ring und U, V, W seien R-Moduln. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Es ist
$$U \otimes_R V \;\cong\; V \otimes_R U.$$
(2) Es ist
$$U \otimes_R (V \otimes_R W) \;\cong\; (U \otimes_R V) \otimes_R W.$$
(3) Es ist
$$U \otimes_R (V \oplus W) \;\cong\; (U \otimes_R V) \oplus (U \otimes_R W)\,.$$

Aufgabe 16.3. Es sei R ein kommutativer Ring. Zeige die R-Modulisomorphie

$$R^n \otimes_R R^m \;\cong\; R^{nm}.$$

Aufgabe 16.4. Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Zeige folgende Aussagen.

(1) Zu einem multiplikativen System $S \subseteq R$ ist $M_S \;\cong\; R_S \otimes_R M$.
(2) Zu einem Ideal $I \subseteq R$ ist $M/IM \;\cong\; R/I \otimes_R M$.

Aufgabe 16.5. Es seien R und S kommutative Ringe und $R \subseteq S$ sei ein direkter Summand. Zeige, dass für jeden R-Modul M die natürliche Abbildung

$$M \longrightarrow S \otimes_R M$$

injektiv ist.

Es sei R ein kommutativer Ring. Ein R-Modul M heißt *flach*, wenn die Tensorierung mit M die Exaktheit von beliebigen Sequenzen erhält.

Aufgabe 16.6. Es sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass der R-Modul R^n flach ist.

Aufgabe 16.7. Man gebe ein Beispiel eines nicht flachen Moduls über einem kommutativen Ring.

Aufgabe 16.8. Es sei H eine endlich erzeugte kommutative Gruppe und

$$H \cong \mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/(n_1) \times \cdots \times \mathbb{Z}/(n_s)$$

eine direkte Zerlegung (mit $n_j \in \mathbb{N}_+$). Zeige mit Hilfe des Tensorproduktes, dass die Zahl r in jeder direkten Zerlegung von H gleich ist.

Aufgabe 16.9. Es sei K ein Körper, R eine kommutative K-Algebra und G eine Gruppe, die als Gruppe von K-Algebraautomorphismen auf R operiere. Ferner liege eine lineare Operation von G auf einem endlichdimensionalen K-Vektorraum V vor. Zeige, dass auf dem R-Modul $R \otimes_K V$ eine verträgliche Operation von G als Gruppe von R-Modulautomorphismen vorliegt.

Aufgabe 16.10. Es sei R ein kommutativer Ring, auf dem eine Gruppe G als Gruppe von Ringautomorphismen operiere mit dem Invariantenring R^G. Es sei M ein R^G-Modul und $R \otimes_{R^G} M$ der durch Ringwechsel gewonnene R-Modul. Zeige, dass es eine verträgliche Operation von G auf $R \otimes_{R^G} M$ als Gruppe von R-Modulautomorphismen gibt. Dabei ist

$$M \subseteq (R \otimes_{R^G} M)^G .$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 16.11. (3 Punkte)

Berechne das Tensorprodukt

$$\left(\mathbb{Z}^3 \oplus (\mathbb{Z}/(2))^2 \oplus \mathbb{Z}/(3)\right) \otimes_{\mathbb{Z}} \left(\mathbb{Z}^2 \oplus \mathbb{Z}/(2) \oplus \mathbb{Z}/(4)\right) .$$

Aufgabe 16.12. (3 Punkte)

Es sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass der R-Modul R_S flach ist.