Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 29

Homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Definition 29.1. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t)y$$

mit einer Funktion (I reelles Intervall)

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

heißt *lineare Differentialgleichung* bzw. genauer *gewöhnliche homogene lineare Differentialgleichung.*

Linear bedeutet hierbei, dass in $f(t,y) = g(t)y$ der Ort y linear eingeht, d.h. zu jedem fixierten Zeitpunkt t_0 ist $f(t_0, y)$ eine lineare Funktion in y.

Die folgende Aussage zeigt, dass solche Differentialgleichungen durch Integration gelöst werden können. Die Nullfunktion ist natürlich immer eine Lösung, interessant sind daher die Lösungen, die noch zusätzliche Eigenschaften (typischerweise eine Anfangsbedingung) erfüllen.

Satz 29.2. *Es sei*

$$y' = g(t)y$$

eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit einer stetigen Funktion

$$g : I \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto g(t),$$

die auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definiert sei. Es sei G eine Stammfunktion zu g auf I. Dann sind die Lösungen der Differentialgleichung gleich

$$y(t) = c \cdot \exp(G(t)) \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

Das Anfangswertproblem

$$y' = g(t)y \text{ und } y(t_0) = y_0$$

(mit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$) besitzt eine eindeutige Lösung.

Beweis. Zunächst gibt es eine Stammfunktion G von g aufgrund von Korollar 24.5, so dass die angegebenen Funktionen existieren. Durch Ableiten bestätigt man direkt, dass diese Funktionen wirklich Lösungen sind. Es sei y eine beliebige Lösungsfunktion. Wir betrachten den Quotienten

$$\left(\frac{y(t)}{\exp G(t)}\right)' = \frac{y'(t)\exp G(t) - y(t)\cdot(\exp(G(t))\cdot g(t))}{\exp^2 G(t)}$$

$$= \frac{y(t)g(t)\exp G(t) - y(t)\cdot(\exp(G(t))\cdot g(t))}{\exp^2 G(t)}$$
$$= 0,$$

so dass aufgrund von Lemma 24.6 der Quotient $\frac{y(t)}{\exp G(t)}$ konstant sein muss, woraus die Behauptung folgt. Die Bedingung $y(t_0) = y_0$ legt den Skalar $c = \frac{y_0}{\exp(G(t_0))}$ eindeutig fest. □

Beispiel 29.3. Die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = 0$$

besitzt genau die konstanten Lösungen

$$y(t) = c \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

Dies folgt direkt aus Lemma 24.6, aber auch aus Satz 29.2.

Beispiel 29.4. Die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y$$

besitzt genau die Lösungen

$$y(t) = ce^t \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

Beispiel 29.5. Sei $a \in \mathbb{R}$. Die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = ay$$

besitzt nach Satz 29.2 die Lösungen

$$y(t) = ce^{at} \text{ mit } c \in \mathbb{R}\,.$$

In den bisherigen Beispielen war die Funktion $g(t)$ konstant, und es war besonders einfach, die Lösungen anzugeben. Man spricht von einer *homogenen linearen gewöhnlichen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.* Die folgenden Beispiele besitzen keine konstanten Koeffizienten, sondern variable Koeffizienten. Diese Differentialgleichungen sind sowohl orts- als auch zeitabhängig.

Beispiel 29.6. Wir betrachten die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t}\,.$$

Eine Stammfunktion zu $g(t) = \frac{1}{t}$ ist der natürliche Logarithmus. Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind daher nach Satz 29.2 gleich

$$c \cdot \exp(\ln t) = ct$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel 29.7. Wir betrachten die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung ($t > 1$)

$$y' = \frac{y}{t^2 - 1}\,.$$

Um die Lösungen zu bestimmen brauchen wir eine Stammfunktion zu

$$g(t) \;=\; \frac{1}{t^2-1} \;=\; \frac{1}{(t-1)(t+1)} \;=\; \frac{1/2}{t-1} - \frac{1/2}{t+1}.$$

Aus der Partialbruchzerlegung gelangt man zur Stammfunktion

$$G(t) = \frac{1}{2}\,\ln(t-1) - \frac{1}{2}\,\ln(t+1)\,.$$

Daher sind die Lösungen gleich

$$c \cdot \exp\left(\frac{1}{2}\,\ln(t-1) - \frac{1}{2}\,\ln(t+1)\right) = c \cdot \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}\,.$$

Beispiel 29.8. Wir betrachten die homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2 + 1}\,.$$

Um die Lösungen zu bestimmen brauchen wir eine Stammfunktion zu

$$g(t) \;=\; \frac{1}{t^2+1},$$

eine solche ist durch

$$G(t) = \;\arctan t$$

gegeben. Daher sind die Lösungen gleich

$$c \cdot \exp\left(\,\arctan t\right).$$

Inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Es gibt homogene lineare Gleichungsysteme, bei denen es darum geht, den Kern einer linearen Abbildung zu bestimmen, und es gibt inhomogene lineare Gleichungssysteme, wo man das Urbild zu einem Vektor (Störvektor) unter einer linearen Abbildung bestimmen soll. Auch zu den linearen Differentialgleichungen gibt es eine inhomogene Variante, bei der eine *Störfunktion* die Sache verkompliziert. Wie bei linearen Gleichungssystemen ist es auch hier wichtig, zuerst die zugehörige homogene Gleichung zu lösen.

Definition 29.9. Eine Differentialgleichung der Form

$$y' = g(t)y + h(t)$$

mit zwei auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ definierten Funktionen $t \mapsto g(t)$ und $t \mapsto h(t)$ heißt *inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung*.

Die folgende Aussage zeigt, dass solche Differentialgleichungen durch Integration gelöst werden können.

Satz 29.10. *Es sei*

$$y' = g(t)y + h(t)$$

eine inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit stetigen Funktionen $g, h : I \to \mathbb{R}$. *Es sei* G *eine Stammfunktion von* g *und es sei*

$$a(t) = \exp\left(G(t)\right)$$

eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung. Dann sind die Lösungen (auf I*) der inhomogenen Differentialgleichung genau die Funktionen*

$$y(t) = c(t)a(t)\,,$$

wobei $c(t)$ *eine Stammfunktion zu* $\frac{h(t)}{a(t)}$ *ist. Das Anfangswertproblem*

$$y' = g(t)y + h(t) \text{ und } y(t_0) = y_0$$

(mit $t_0 \in I$, $y_0 \in \mathbb{R}$*) besitzt eine eindeutige Lösung.*

Beweis. Da $a(t)$ keine Nullstelle besitzt, kann man jede (differenzierbare) Funktion

$$y : I \longrightarrow \mathbb{R}$$

als

$$y(t) = c(t)a(t)$$

mit einer unbekannten (differenzierbaren) Funktion $c(t)$ ansetzen. Dabei ist (für eine differenzierbare Funktion y)

$$y'(t) = c'(t)a(t) + c(t)a'(t)\,.$$

Daher kann man die Lösungsbedingung

$$y'(t) = g(t)y(t) + h(t)$$

als

$$c'(t)a(t) + c(t)a'(t) = g(t)c(t)a(t) + h(t)$$

schreiben, und diese gilt wegen $a'(t) = g(t)a(t)$ genau dann, wenn

$$c'(t)a(t) = h(t)$$

bzw.

$$c'(t) = \frac{h(t)}{a(t)}$$

gilt. D.h. $c(t)$ muss eine Stammfunktion zu $\frac{h(t)}{a(t)}$ sein. Es sei nun noch die Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ vorgegeben. Mit c ist auch $c(t) + c_0$ für jedes $c_0 \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu $\frac{h(t)}{a(t)}$. Die Bedingung

$$y_0 = (c(t_0) + c_0)a(t_0)$$

legt dann c_0 eindeutig fest. □

Die in diesem Satz verwendete Methode heißt *Variation der Konstanten*. Man ersetzt dabei die Lösungsfunktionen der zugehörigen homogenen Gleichung, also $ca(t)$ mit konstantem $c \in \mathbb{R}$, durch eine variable Funktion $c(t)$.

Beispiel 29.11. Wir betrachten die inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = y + t^2$$

mit der Anfangsbedingung $y(3) = 4$. Die Exponentialfunktion $a(t) = e^t$ ist eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung. Nach Satz 29.10 müssen wir daher eine Stammfunktion zu

$$\frac{t^2}{e^t} = t^2 \cdot e^{-t}$$

finden. Mit zweifacher partieller Integration findet man die Stammfunktion

$$(-t^2 - 2t - 2)e^{-t}\,.$$

Also haben die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung die Form

$$e^t((-t^2 - 2t - 2)e^{-t} + c) \;=\; -t^2 - 2t - 2 + ce^t.$$

Wenn wir noch die Anfangsbedingung $y(3) = 4$ berücksichtigen, so ergibt sich die Bedingung

$$-9 - 6 - 2 + ce^3 \;=\; -17 + ce^3 \;=\; 4,$$

also $c = \frac{21}{e^3}$. Die Lösung des Anfangswertproblems ist also

$$y(t) = -t^2 - 2t - 2 + \frac{21}{e^3}e^t\,.$$

Beispiel 29.12. Wir betrachten für $t > 1$ die inhomogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2 - 1} + t - 1$$

mit der Anfangsbedingung $y(2) = 5$. Hier ist also $h(t) = t - 1$ die Störfunktion und

$$y' = \frac{y}{t^2 - 1}$$

ist die zugehörige homogene lineare Differentialgleichung. Eine Stammfunktion von $\frac{1}{t^2-1}$ ist

$$G(t) \;=\; \frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(t+1) \;=\; \frac{1}{2}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right) \;=\; \ln\left(\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}\right).$$

Daher ist nach Satz 29.2 (bzw. nach Beispiel 29.7)

$$a(t) = \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}$$

eine Lösung zur homogenen Differentialgleichung. Zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung brauchen wir eine Stammfunktion zu

$$\frac{h(t)}{a(t)} \;=\; \frac{\sqrt{t+1}}{\sqrt{t-1}} \cdot (t-1) \;=\; \sqrt{t+1} \cdot \sqrt{t-1} \;=\; \sqrt{t^2 - 1}.$$

Eine Stammfunktion dazu ist

$$c(t) = \frac{1}{2}(t\sqrt{t^2-1} - \text{ arcosh } t\,)\,.$$

Die Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung haben also die Gestalt

$$\sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \cdot \left(\frac{1}{2}(t\sqrt{t^2-1} - \text{ arcosh } t\,) + c\right)$$

Die Anfangsbedingung führt zu

$$5 \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{2}(2\sqrt{3} - \text{ arcosh } 2\,) + c_0\right) \;=\; 1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} \text{ arcosh } 2 \,+ c_0\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Also ist

$$c_0 \;=\; 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \text{ arcosh } 2$$

und die Lösung des Anfangswertproblems ist

$$\begin{aligned} & y(t) \\ = \; & \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \cdot \left(\frac{1}{2}(t\sqrt{t^2-1} - \text{ arcosh } t\,) + 4\sqrt{3} + \frac{1}{2} \text{ arcosh } 2\right). \end{aligned}$$