Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Arbeitsblatt 20

Übungsaufgaben

Aufgabe 20.1. Es seien
$$f, g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
konvexe Funktionen. Zeige, dass die Summe $f + g$ ebenfalls konvex ist.

Aufgabe 20.2. Es sei
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine Funktion. Zeige, dass f genau dann konvex ist, wenn $-f$ konkav ist.

Aufgabe 20.3. Es seien
$$f, g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
konvexe Funktionen. Zeige durch Beispiele, dass die Differenz $f - g$ konvex oder konkav sein kann, aber weder konvex noch konkav sein muss.

Aufgabe 20.4. Es seien
$$f, g\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
konvexe Funktionen. Zeige durch Beispiele, dass das Produkt fg konvex oder konkav sein kann, aber weder konvex noch konkav sein muss.

Aufgabe 20.5. Es sei
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine stetige Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Zeige, dass f genau dann konvex ist, wenn für jedes Punktepaar $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ mit $a, b \in I$ die Verbindungsstrecke oberhalb des Graphen von f verläuft.

(Bemerkung: Eine konvexe Funktion auf einem offenen Intervall ist übrigens immer stetig.)

Aufgabe 20.6. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und
$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$
eine zweimal differenzierbare Funktion. Zeige, dass f genau dann eine konvexe Funktion ist, wenn für die zweite Ableitung $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ gilt.

Aufgabe 20.7. Es sei $f \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit ungeradem Grad ≥ 3. Zeige, dass f weder konvex noch konkav sein kann.

Aufgabe 20.8. Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Zeige, dass der Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ebenfalls R ist.

Aufgabe 20.9. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto z^2 \cdot \exp\left(z^3 - 4z\right).$$

Aufgabe 20.10. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\ln : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Aufgabe 20.11. Eine Währungsgemeinschaft habe eine Inflation von jährlich 2%. Nach welchem Zeitraum (in Jahren und Tagen) haben sich die Preise verdoppelt?

Aufgabe 20.12. Es sei

$$f\colon\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x),$$

eine differenzierbare Funktion mit den Eigenschaften

$$f' = f \text{ und } f(0) = 1.$$

Zeige, dass $f(x) = \exp x$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 20.13. Berechne bis auf drei Nachkommastellen den Wert von e^i.

Aufgabe 20.14. Bestimme die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion unter Verwendung von Satz 20.9.

Aufgabe 20.15. Bestimme die Ableitung der Sinus- und der Kosinusfunktion unter Verwendung von Satz 15.10 (4).

Aufgabe 20.16. Bestimme die 1034871-te Ableitung der Sinusfunktion.

Aufgabe 20.17.*

Wir betrachten die Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(x) = \cos(\ln x).$$

a) Bestimme die Ableitung f'.

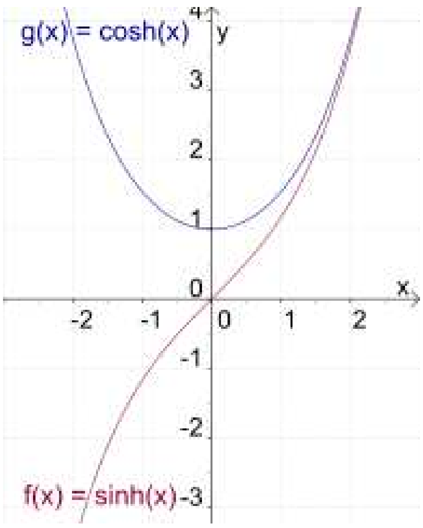
b) Bestimme die zweite Ableitung f''.

Aufgabe 20.18. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto (\sin z)(\cos z).$$

Aufgabe 20.19. Bestimme für $n \in \mathbb{N}$ die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto (\sin z)^n.$$



Der Verlauf der Hyperbelfunktionen im Reellen.

Die für $z \in \mathbb{C}$ durch

$$\sinh z := \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$$

definierte Funktion heißt *Sinus hyperbolicus*.

Die für $z \in \mathbb{C}$ durch

$$\cosh z := \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$$

definierte Funktion heißt *Kosinus hyperbolicus*.

Aufgabe 20.20. Zeige die folgenden Eigenschaften von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus (dabei ist $z \in \mathbb{C}$.)

(1)
$$\cosh z + \sinh z = e^z .$$

(2)
$$\cosh z - \sinh z = e^{-z} .$$

(3)
$$(\cosh z)^2 - (\sinh z)^2 = 1 .$$

(4)
$$\cosh iz = \cos z \text{ und } \sinh iz = i \cdot \sin z .$$

AUFGABE 20.21. Bestimme die Ableitungen von Sinus hyperbolicus und Kosinus hyperbolicus.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 20.22. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine konvexe Funktion, seien $x_1, \ldots, x_n \in I$ und $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\sum_{i=1}^n t_i = 1$. Zeige die Jensensche Ungleichung

$$f\left(\sum_{i=1}^n t_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n t_i f(x_i).$$

AUFGABE 20.23. (3 Punkte)

Bestimme das Konvexitätsverhalten und die Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + 7x + 5\,.$$

AUFGABE 20.24. (4 Punkte)

Es sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine ungerade Funktion, die nicht linear sei. Zeige, dass f weder konvex noch konkav sein kann.

AUFGABE 20.25. (1 Punkt)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\ z \longmapsto \sin\,(\,\cos\,z\,)\,.$$

AUFGABE 20.26. (2 Punkte)

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^x.$$