Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Analysis I

Arbeitsblatt 21

Übungsaufgaben

Aufgabe 21.1. Bestimme die Ableitung der Funktion

$$D \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}.$$

Was ist die Definitionsmenge D des *Tangens*?

Aufgabe 21.2. Zeige, dass die reelle Sinusfunktion eine bijektive, streng wachsende Funktion

$$[-\pi/2, \pi/2] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert, und dass die reelle Kosinusfunktion eine bijektive, streng fallende Funktion

$$[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$$

induziert.

Aufgrund von Korollar 21.4 ist die reelle Sinusfunktion und die reelle Kosinusfunktion bijektiv auf gewissen Intervallen. Die Umkehrfunktionen heißen folgendermaßen.

Die Umkehrfunktion der reellen Sinusfunktion ist

$$[-1, 1] \longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\, x \longmapsto \arcsin x\,,$$

und heißt *Arcus-Sinus*.

Die Umkehrfunktion der reellen Kosinusfunktion ist

$$[-1, 1] \longrightarrow [0, \pi],\, x \longmapsto \arccos x\,,$$

und heißt *Arcus-Kosinus*.

Aufgabe 21.3. Bestimme die Ableitungen von Arcus-Sinus und Arcus-Kosinus.

Aufgabe 21.4. Zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \in]0, 1], \\ 0 \text{ für } x = 0, \end{cases}$$

stetig ist und unendlich viele Nullstellen besitzt.

Aufgabe 21.5.*

Wir betrachten die durch

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \neq 0\,, \\ 0 \text{ sonst}\,, \end{cases}$$

definierte Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Zeige, dass es zu jedem λ, $-1 \leq \lambda \leq 1$, eine Nullfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+$ derart gibt, dass die Folge der Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_n) - f(0)}{x_n}$$

gegen λ konvergiert.

Aufgabe 21.6. Bestimme für die folgenden Funktionen, ob der Funktionslimes existiert und welchen Wert er gegebenenfalls annimmt.

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$,
(2) $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^2}{x}$,
(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x^2}$,
(4) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x}$.

Aufgabe 21.7. Bestimme für die folgenden Funktionen, ob der Funktionslimes für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x \to 0$, existiert und welchen Wert er gegebenenfalls annimmt.

(1) $\sin \frac{1}{x}$,
(2) $x \cdot \sin \frac{1}{x}$,
(3) $\frac{1}{x} \cdot \sin \frac{1}{x}$.

Aufgabe 21.8.*

Bestimme den Grenzwert der Folge

$$\frac{\sin n}{n},\ n \in \mathbb{N}_+\,.$$

Aufgabe 21.9. Zeige, dass die Folge

$$x_n := \sin n$$

nicht konvergiert.

Aufgabe 21.10.*

Zu einem Startwert $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sei eine Folge rekursiv durch

$$x_{n+1} = \sin x_n$$

definiert. Entscheide, ob $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 21.11. Untersuche die Funktionenfolge

$$f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto (\sin x)^n,$$

auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. An welchen Punkten existiert die Grenzfunktion, an welchen ist sie stetig, an welchen differenzierbar? Wie verhält sich die abgeleitete Funktionenfolge, also $g_n(x) = f_n'(x)$?

Aufgabe 21.12. Es sei $n \in \mathbb{N}_+$. Es sei F eine komplexe auf $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe der Form

$$F = \sum_{j=0}^{\infty} c_{jn} z^{jn} .$$

Zeige, dass für jede n-te komplexe Einheitswurzel ζ die Gleichheit $F(\zeta z) = F(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

Aufgabe 21.13. Es sei $F = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i$ eine komplexe auf $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihe und $n \in \mathbb{N}_+$. Für jede n-te komplexe Einheitswurzel ζ gelte $F(\zeta z) = F(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass $c_i = 0$ für alle i gilt, die kein Vielfaches von n sind.

Aufgabe 21.14.*

Es sei $n \in \mathbb{N}_+$ und sei ζ eine n-te komplexe Einheitswurzel. Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C},\, z \longmapsto f(z),$$

eine differenzierbare Funktion mit der Eigenschaft, dass die Gleichheit $f(\zeta z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gelte. Zeige, dass die Ableitung die Beziehung $f'(\zeta z) = \zeta^{-1} f'(z)$ erfüllt.

Was bedeutet die vorstehende Aufgabe für gerade und ungerade Funktionen?

Aufgabe 21.15. Es sei

$$f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Es gibt eine stetige Funtion

$$g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{C}$$

mit $f(z) = g(|z|)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(2) Für alle n-ten Einheitswurzeln $\zeta \in \mathbb{C}$ (alle $n \in \mathbb{N}$) ist $f(\zeta z) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

(3) Für alle $w \in \mathbb{C}$ mit $|w| = 1$ ist $f(wz) = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 21.16. (3 Punkte)

Bestimme die Intervalle, auf denen die reelle Sinusfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

konvex bzw. konkav ist.

Aufgabe 21.17. (3 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} \text{ für } x \in]0,1], \\ 0 \text{ für } x = 0, \end{cases}$$

unendlich viele isolierte lokale Maxima und unendlich viele isolierte lokale Minima besitzt.

Aufgabe 21.18. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto f(x),$$

die unendlich viele Nullstellen und unendlich viele isolierte lokale Maxima besitzt, deren Funktionswert ≥ 1 ist.

Aufgabe 21.19. (6 Punkte)

Zeige, dass es keine stetige Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \, x \longmapsto f(x),$$

gibt, die unendlich viele Nullstellen besitzt derart, dass zwischen je zwei Nullstellen ein lokales Maximum existiert, dessen Funktionswert ≥ 1 ist.

Aufgabe 21.20. (6 Punkte)

Es sei $z_n \in \mathbb{C}$ eine Folge von komplexen Zahlen, die wir in Polarkoordinaten als

$$z_n = r_n e^{i\varphi_n}$$

mit $r_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\varphi_n \in [0, 2\pi[$ schreiben. Zeige, dass die Folge genau dann konvergiert, wenn einer der folgenden Fälle vorliegt.

(1) Die Folge r_n konvergiert gegen 0.
(2) Die beiden Folgen r_n und φ_n konvergieren (in $\mathbb{R}$).
(3) Die Folge r_n konvergiert und die Folge φ_n besitzt die Punkte 0 und 2π als einzige Häufungspunkte.

Aufgabe 21.21. (6 Punkte)

Zu $n \geq 3$ sei A_n der Flächeninhalt eines in den Einheitskreis eingeschriebenen gleichmäßigen n-Eckes. Zeige $A_n \leq A_{n+1}$.