Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

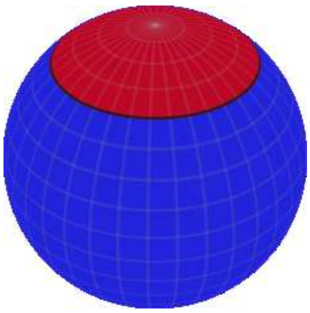
Mathematik III

Arbeitsblatt 88

Aufwärmaufgaben

AUFGABE 88.1. Beschreibe diverse Kleidungsstücke als zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand.

AUFGABE 88.2. Zeige, dass sowohl das blaue als auch das rote Oberflächenstück einschließlich der Begrenzungslinie eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist. Was ist der Rand? Sind die beiden Mannigfaltigkeiten diffeomorph? Gibt es eine einfachere dazu diffeomorphe Mannigfaltigkeit?



AUFGABE 88.3. Welche der folgenden Funktionen

$$\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

lassen sich differenzierbar in den Randpunkt 0 fortsetzen.

(1) $x^3 + \sin^3 x - e^{-x}$,
(2) $\frac{1}{x}$,
(3) $\sin \frac{1}{x}$,
(4) $x \sin \frac{1}{x}$,
(5) $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}$,
(6) $x^2 \sin \frac{1}{x}$.

AUFGABE 88.4. Es sei $H \subset \mathbb{R}^n$ ein Halbraum. Es sei $Q \in H$ ein Punkt und $Q \in U \subseteq H$, wobei U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ sei. Zeige, dass Q kein Randpunkt von H ist.

Aufgabe 88.5. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (ohne Rand) und N eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Was kann man über das Produkt $M \times N$ sagen?

Aufgabe 88.6. Die abgeschlossene Kreisscheibe $B(0,1)$ trage die Standardorientierung des $\mathbb{R}^2$. Läuft die durch die äußere Normale festgelegte Orientierung auf dem Rand (also auf dem Einheitskreis) mit dem oder gegen den Uhrzeigersinn?

Aufgabe 88.7. Definiere die Begriffe *Diffeomorphismus*, *totales Differential* und *höhere Ableitungen* für Halbräume (bzw. offene Teilmengen davon).

Aufgabe 88.8. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit mit Rand. Unter einem *differenzierbaren Halbweg* verstehen wir jede differenzierbare Abbildung

$$\gamma : [-\epsilon, 0] \longrightarrow M$$

(mit $\epsilon > 0$). Definiere, wann zwei Halbwege mit $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = P \in M$ *tangential äquivalent* sind, und zeige, dass dadurch eine Äquivalenzrelation gegeben ist. Was kann man über die Quotientenmenge sagen?

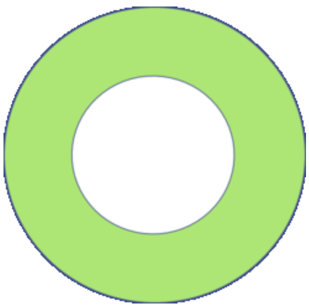
Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 88.9. (4 Punkte)

Man gebe für den Kreisring

$$M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq \| x \| \leq 2\}$$

explizit Karten an, die zeigen, dass M eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist.



Aufgabe 88.10. (6 Punkte)

Zeige, dass die Halbebene $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$ und der Quadrant $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ homöomorph sind.

Aufgabe 88.11. (6 Punkte)

Zeige, dass die Halbebene $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$ und der Quadrant $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ nicht diffeomorph sind.

(Was ist hierbei der geeignete Diffeomorphiebegriff?)

Aufgabe 88.12. (6 Punkte)

Es sei $M = B(0,1) \setminus \{(0,1),(0,-1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, also die abgeschlossene Kreisscheibe, aus der man zwei Randpunkte herausgenommen hat. Es sei $N =]-1,1[\times[-1,1]$ das Produkt eines offenen und eines abgeschlossenen Intervalls. Zeige, dass M und N diffeomorphe Mannigfaltigkeiten mit Rand sind.

Aufgabe 88.13. (4 Punkte)

Es seien $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen und es sei

$$\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$$

ein Diffeomorphismus, der eine Homöomorphie zwischen $V_1 \cap H$ und $V_2 \cap H$ induziert und damit auch zwischen $V_1 \cap \partial H$ und $V_2 \cap \partial H$ (H bezeichnet den Halbraum und ∂H seinen Rand). Zeige, dass die Einschränkung auf den Rand ebenfalls ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 88.14. (4 Punkte)

Die abgeschlossene Einheitskugel $B(0,1)$ trage die Standardorientierung des $\mathbb{R}^3$. Bestimme, ob die beiden Tangentenvektoren $(2,1,0)$ und $(3,-1,0)$ am Nordpol $(1,0,0)$ die durch die äußere Normale induzierte Orientierung auf dem Rand (also auf der Einheitssphäre) repräsentieren oder nicht?

Abbildungsverzeichnis