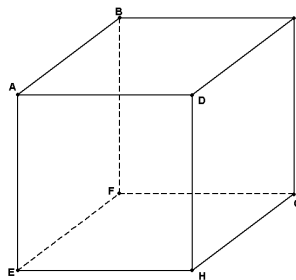


## Einführung in die Algebra

### Vorlesung 1

#### Beispiele zu Symmetrien

Wir beginnen diese Vorlesung, indem wir am Beispiel der Symmetrien an einem Würfel den Gruppenbegriff in Erinnerung rufen.



BEISPIEL 1.1. Wir betrachten einen Würfel  $W \subset \mathbb{R}^3$  mit der Seitenlänge 2 und dem Nullpunkt als Mittelpunkt. Die Eckpunkte sind also

$$(\pm 1, \pm 1, \pm 1).$$

Wir fragen uns, welche Möglichkeiten es gibt, den Würfel in sich selbst zu überführen. Dabei soll der Würfel nicht in irgendeiner Form deformiert werden, es ist nur erlaubt, ihn als Ganzes zu bewegen, und zwar soll die Bewegung wirklich physikalisch durchführbar sein. Man spricht auch von einer (eigentlichen) *Bewegung* des Würfels. Bei einer solchen Bewegung verändert der Würfelmittelpunkt seine Lage nicht, und es werden Seiten auf Seiten, Kanten auf Kanten und Ecken auf Ecken abgebildet. Ebenso werden Seitenmittelpunkte auf Seitenmittelpunkte abgebildet, und gegenüberliegende Seitenmittelpunkte werden auf gegenüberliegende Seitenmittelpunkte abgebildet. Die Seitenmittelpunkte sind die sechs Punkte

$$(\pm 1, 0, 0), (0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm 1).$$

Wenn der Punkt  $(1, 0, 0)$  auf den Seitenmittelpunkt  $S$  abgebildet wird, so wird  $(-1, 0, 0)$  auf den gegenüberliegenden Punkt, also  $-S$ , abgebildet. Hierbei ist jede Vorgabe von  $S$  erlaubt, doch dadurch ist die Bewegung noch nicht eindeutig bestimmt. Für den Seitenmittelpunkt  $(0, 1, 0)$  gibt es dann noch vier mögliche Bildpunkte (nur  $S$  und  $-S$  sind ausgeschlossen), da man den Würfel um die durch  $S$  gegebene Achse um ein Vielfaches von 90 Grad drehen kann. Diese Drehungen entsprechen genau den Möglichkeiten, den Punkt  $(0, 1, 0)$  auf einen der vier verbliebenen Seitenmittelpunkte abzubilden. Durch die Wahl des zweiten Seitenmittelpunktes  $T$  ist die Bewegung dann eindeutig festgelegt. Ist das völlig klar?

Um sich das klar zu machen, sind folgende Beobachtungen sinnvoll.

- (1) Bewegungen lassen sich hintereinander ausführen, d.h. wenn man zwei Würfelbewegungen  $\varphi$  und  $\psi$  hat, so ist auch die *Hintereinanderausführung*  $\psi \circ \varphi$ , die zuerst  $\varphi$  und dann  $\psi$  durchführt, sinnvoll definiert.
- (2) Die *identische Bewegung*, die nichts bewegt, ist eine Bewegung. Wenn man zu einer beliebigen Bewegung die identische Bewegung davor oder danach durchführt, so ändert das die Bewegung nicht.
- (3) Zu einer Bewegung  $\varphi$  gibt es die *entgegengesetzte Bewegung* (oder „Rückwärtsbewegung“)  $\varphi^{-1}$ , die die Eigenschaft besitzt, dass die Hintereinanderausführungen  $\varphi^{-1} \circ \varphi$  und  $\varphi \circ \varphi^{-1}$  einfach die Identität sind.

Mit diesen Beobachtungen kann man sich das oben erwähnte Prinzip folgendermaßen klar machen: angenommen, es gibt zwei Bewegungen  $\varphi$  und  $\psi$ , die beide  $(1, 0, 0)$  auf  $S$  und  $(0, 1, 0)$  auf  $T$  abbilden. Es sei  $\psi^{-1}$  die umgekehrte Bewegung zu  $\psi$ . Dann betrachtet man die Gesamtbewegung

$$\theta = \psi^{-1} \circ \varphi.$$

Diese Bewegung hat die Eigenschaft, dass  $(1, 0, 0)$  auf  $(1, 0, 0)$  und dass  $(0, 1, 0)$  auf  $(0, 1, 0)$  abgebildet wird, da ja  $\varphi$  den Punkt  $(1, 0, 0)$  auf  $S$  schickt und  $\psi^{-1}$  den Punkt  $S$  auf  $(0, 1, 0)$  zurückschickt (und entsprechend für  $(0, 1, 0)$ ).  $\theta$  hat also die Eigenschaft, dass sowohl  $(1, 0, 0)$  als auch  $(0, 1, 0)$  auf sich selbst abgebildet werden, d.h., es handelt sich um *Fixpunkte* der Bewegung. Dann ist aber bereits die gesamte  $x, y$ -Ebene fix. Die einzige physikalisch durchführbare Bewegung des Würfels, die diese Ebene unbewegt lässt, ist aber die identische Bewegung. Daher ist  $\psi^{-1} \circ \varphi = \text{id}$  und damit  $\varphi = \psi$ . Man beachte, dass die *Spiegelung* an der  $x, y$ -Ebene die Punkte  $(0, 0, 1)$  und  $(0, 0, -1)$  vertauscht, doch ist dies eine sogenannte *uneigentliche Bewegung*, da sie nicht physikalisch durchführbar ist.

Damit ergibt sich, dass es für den Basisvektor  $(1, 0, 0)$  sechs mögliche Bildvektoren gibt, für den zweiten Basisvektor  $(0, 1, 0)$  noch jeweils vier und dass dadurch die Abbildung eindeutig festgelegt ist. Insgesamt gibt es also 24 Transformationen des Würfels. Am einfachsten beschreibt man die Bewegungen durch eine  $3 \times 3$ -Matrix, wobei in den Spalten die Bildvektoren der Basisvektoren stehen. Wenn der erste Basisvektor festgehalten wird, so sind die vier möglichen Bewegungen durch die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Dies sieht man so: wenn eine Seitenmitte auf sich selbst abgebildet wird, so gilt das auch für die gegenüberliegende Seitenmitte und dann wird die dadurch definierte Achse nicht bewegt. Eine Bewegung, die eine solche

*Seitenmittelpunktachse* fest hält, muss eine Drehung um diese Achse sein, und zwar eine um ein Vielfaches von 90 Grad. Eine solche Drehung ist eine Bewegung in der Ebene (nämlich in der zur festen Achse senkrechten Ebene), und diese Beobachtung führt zu den angegebenen Matrizen.

Eine wichtige Eigenschaft dieser Bewegungen ist, dass es sich um Drehungen des Raumes um eine fixierte Achse handelt. Diese Eigenschaft zeichnet Raumbewegungen sogar aus, wie wir später noch sehen werden. Da die eben besprochenen Drehungen Vielfache einer Vierteldrehung sind, folgt, dass wenn man sie jeweils viermal hintereinander durchführt, dann wieder die Identität vorliegt. Bei der Halbdrehung führt natürlich schon die zweifache Ausführung zur Identität. Dies wird später mit dem Begriff der *Ordnung* einer Bewegung (eines Gruppenelementes) präzisiert.

Wir betrachten nun im Würfelbeispiel die Raumdiagonale  $D$ , die durch  $(1, 1, 1)$  und durch  $(-1, -1, -1)$  geht. Auch um diese Achse kann man den Würfel drehen, und zwar um Vielfache von 120 Grad. Man mache sich hierzu klar, wie der Würfel aussieht, wenn diese Achse zu einem Punkt im Gesichtsfeld wird. Die Dritteldrehung, die  $(1, 0, 0)$  auf  $(0, 0, 1)$  schickt, muss  $(0, 0, 1)$  auf  $(1, 0, 0)$  schicken. Die beiden Dritteldrehungen um diese Raumdiagonale sind daher in Matrixdarstellung durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben (die natürlich invers zueinander sind). Die Bewegungen am Würfel kann man dadurch verstehen, indem man untersucht, was eine Bewegung mit den Seitenmittelpunkten macht, wie sie also diese sechs Punkte ineinander überführt, welche sie fest lässt, etc. Eine Bewegung bestimmt dabei stets eine Bijektion dieser Punktmenge in sich selbst. Eine solche Bijektion nennt man auch eine *Permutation*. Es gibt aber auch andere charakteristische Punkte bzw. allgemeiner geometrische Teilobjekte des Würfels, die bei einer Würfelbewegung ineinander überführt werden, z.B. die Menge der Eckpunkte, die Menge der Kantenmittelpunkte, die Menge der Kanten, die Menge der Seiten, die Menge aller Raumdiagonalen, etc. Jede Bewegung hat auf diesen Objekten eine für sie charakteristische (Aus-)wirkung. Die mathematische Präzisierung dieser Beobachtung führt zum Begriff der *Gruppenwirkung* und des *Gruppenhomomorphismus*. Wenn man die Bezeichnung der Ecken vom obigen Bild übernimmt, so haben die oben an zweiter Stelle angeführte Vierteldrehung und die erste Dritteldrehung folgende Wirkung auf den Eckpunkten.

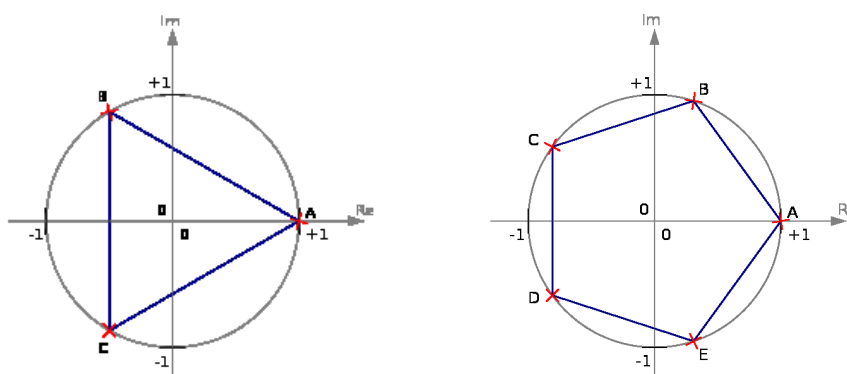
Vierteldrehung um Seitenmittelachse.

Punkt	$A$	$A$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$
Bildpunkt	$E$	$A$	$D$	$H$	$F$	$B$	$C$	$G$

## Dritteldrehung um Raumdiagonale

Punkt	$A$	$A$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$
Bildpunkt	$H$	$D$	$C$	$G$	$E$	$A$	$B$	$F$

Wenn man eine Drehachse für eine Raumbewegung gefunden hat, so ist die Bewegung dadurch charakterisiert, wie sie auf der zur Achse senkrechten Ebene wirkt. Von daher ist es zuerst wichtig, die Bewegungen der Ebene mit einem fixierten Punkt zu verstehen.



BEISPIEL 1.2. Wir betrachten nun den Einheitskreis

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Dieser wird bekanntlich parametrisiert durch die trigonometrischen Funktionen. Diese ordnen einem Winkel  $\alpha \in [0, 2\pi)$  (bzgl. der  $x$ -Achse, gegen den Uhrzeigersinn) den zugehörigen Punkt

$$(\cos \alpha, \sin \alpha)$$

auf dem Kreisbogen zu. Eine gleichmäßige Unterteilung des Intervalls  $[0, 2\pi]$  in  $n$  gleichgroße Stücke, die durch die Grenzen

$$0, \frac{2\pi}{n}, 2\frac{2\pi}{n}, 3\frac{2\pi}{n}, \dots, (n-1)\frac{2\pi}{n}, n\frac{2\pi}{n} = 2\pi$$

gegeben sind, führt zu einer gleichmäßigen Unterteilung des Kreises mit den Eckpunkten

$$(1, 0), \left(\sin \frac{2\pi}{n}, \cos \frac{2\pi}{n}\right), \left(\cos 2\frac{2\pi}{n}, \sin 2\frac{2\pi}{n}\right), \left(\cos 3\frac{2\pi}{n}, \sin 3\frac{2\pi}{n}\right), \dots, \\ \left(\cos(n-1)\frac{2\pi}{n}, \sin(n-1)\frac{2\pi}{n}\right).$$

Diese Punkte sind die Eckpunkte eines *regelmäßigen  $n$ -Ecks*. Das regelmäßige „Zweieck“ besitzt die Ecken  $(1, 0)$  und  $(-1, 0)$ , das regelmäßige (= *gleichseitige*) Dreieck besitzt die Ecken

$$(1, 0), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

das regelmäßige Viereck (Quadrat) besitzt die Ecken

$$(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1),$$

usw. Wir fassen ein solches reguläres  $n$ -Eck auf als ein in sich starres Gebilde und interessieren uns dafür, wie man es in sich selbst überführen kann. Der Nullpunkt ist der Mittelpunkt (Schwerpunkt) des  $n$ -Eckes, und bleibt bei einer Bewegung des  $n$ -Eckes auf sich selbst unverändert. Da eine solche Bewegung die Längen nicht ändert, muss der Punkt  $(1, 0)$  auf einen der Eckpunkte abgebildet werden, da nur diese Punkte des  $n$ -Eckes vom Nullpunkt den Abstand eins besitzen. Da eine Bewegung auch die Winkel nicht verändert, muss der Nachbarpunkt  $(\sin \frac{2\pi}{n}, \cos \frac{2\pi}{n})$  auf einen Nachbarpunkt des Bildpunktes von  $(1, 0)$  abgebildet werden. Bei einer eigentlichen (physikalisch in der Ebene!) durchführbaren Bewegung bleibt auch die Reihenfolge (die „Orientierung“) der Ecken erhalten, so dass die einzigen eigentlichen Bewegungen eines regulären  $n$ -Eckes die Drehungen um ein Vielfaches von  $2\pi/n$  sind.

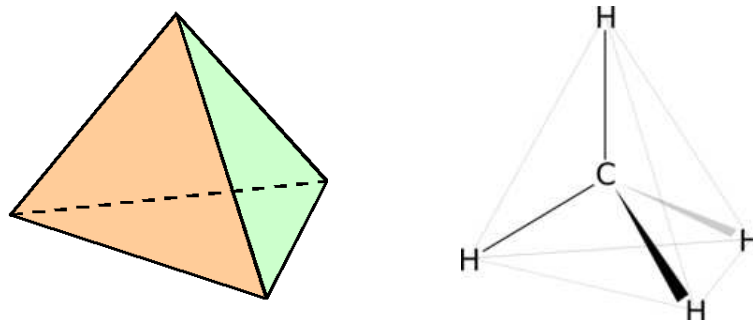
Wenn man auch noch uneigentliche Bewegungen zulässt, so gibt es noch die Spiegelungen an einer Achse, und zwar geht bei  $n$  gerade die Achse durch zwei gegenüberliegende Eckpunkte oder zwei gegenüberliegende Seitenmittelpunkte, und bei  $n$  ungerade durch einen Eckpunkt und einen gegenüberliegenden Seitenmittelpunkt.

Sei  $n$  fixiert, und setze  $\alpha = 2\pi/n$  und sei  $\varphi$  die Drehung des  $n$ -Eckes um  $\alpha$  gegen den Uhrzeigersinn. Dann kann man jede Drehung am  $n$ -Eck schreiben als  $\varphi^k$  mit einem eindeutig bestimmten  $k$  zwischen 0 und  $n - 1$ . Dabei ist  $\varphi^0 = \text{id}$  die Nulldrehung (die identische Bewegung), bei der nichts bewegt wird. Wenn man  $\varphi$   $n$ -mal ausführt, so hat man physikalisch gesehen eine volle Umdrehung durchgeführt. Vom Ergebnis her ist das aber identisch mit der Nulldrehung. Allgemeiner gilt, dass wenn man  $\varphi$   $m$ -mal ausführt, dass dann das Endergebnis (also die effektive Bewegung) nur vom *Rest*  $m \bmod n$  abhängt. Die inverse Bewegung zu  $\varphi^k$  ist  $\varphi^{-k}$ , also  $k$ -mal wieder zurück, oder gleichbedeutend  $\varphi^{(n-k)}$ .

Sei nun  $\psi$  eine bestimmte Drehung am  $n$ -Eck, also  $\psi = \varphi^k$  mit einem eindeutig bestimmten  $k$ ,  $0 \leq k \leq n - 1$ . Dann kann man sich überlegen, welche Drehungen sich als Hintereinanderausführung von  $\psi$  schreiben lassen, also zur Menge

$$\psi^0 = \text{id}, \psi^1 = \psi, \psi^2, \psi^3, \dots$$

gehören. Da die Menge der Drehungen endlich ist, muss es eine Wiederholung geben. Wie sieht diese aus, wann durchlaufen die Hintereinanderausführungen von  $\psi$  sämtliche Drehungen am  $n$ -Eck? Dafür gibt es recht einfache Antworten im Rahmen der elementaren Gruppentheorie.



BEISPIEL 1.3. Wir betrachten einen *Tetraeder*, also eine Pyramide mit vier gleichseitigen Dreiecken als Flächen. Das einfachste Modell dafür ergibt sich, wenn man bei einem Würfel jeden „zweiten“ Punkt nimmt, also beispielsweise die Eckpunkte

$$(1, 1, 1), (-1, -1, 1), (1, -1, -1), (-1, 1, -1).$$

Der Abstand der Eckpunkte zum Nullpunkt ist dann  $\sqrt{3}$  und die Kantenlängen sind  $\sqrt{2}$ . Eine eigentliche Bewegung des Tetraeders ist auch eine eigentliche Bewegung des zugehörigen Würfels.

### Der Gruppenbegriff

In den angeführten Beispielen haben wir gesehen, dass man die Bewegungen an einem der geometrischen Objekte hintereinander ausführen kann und wieder eine Bewegung erhält, dass es die identische Bewegung gibt, und dass es zu einer gegebenen Bewegung die umgekehrte Bewegung gibt, die sie neutralisiert. Diese Eigenschaften werden durch den Begriff der Gruppe mathematisch präzisiert.

DEFINITION 1.4. Eine *Verknüpfung*  $\circ$  auf einer Menge  $M$  ist eine Abbildung

$$\circ : M \times M \longrightarrow M, (x, y) \longmapsto \circ(x, y) = x \circ y.$$

Statt  $\circ(x, y)$  schreibt man  $x \circ y$  oder  $x * y$  oder einfach  $xy$ .

Wenn  $X$  ein geometrisches Objekt ist, und  $M = \text{Bew}(X)$  die Menge der Bewegungen auf  $X$  (also die bijektiven Abbildungen von  $X$  nach  $X$ , die die geometrische Struktur von  $X$  respektieren), so ist die Hintereinanderschaltung von Bewegungen, also

$$\text{Bew}(X) \times \text{Bew}(X) \longrightarrow \text{Bew}(X), (f, g) \longmapsto g \circ f,$$

eine Verknüpfung.

DEFINITION 1.5. Ein *Monoid* ist eine Menge  $M$  zusammen mit einer Verknüpfung

$$\circ : M \times M \rightarrow M$$

und einem ausgezeichneten Element  $e \in M$  derart, dass folgende beiden Bedingungen erfüllt sind.

(1) Die Verknüpfung ist *assoziativ*, d.h. es gilt

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

für alle  $x, y, z \in M$ .

(2)  $e$  ist *neutrales Element* der Verknüpfung, d.h. es gilt

$$x \circ e = x = e \circ x$$

für alle  $x \in M$ .

Die Hintereinanderausführung von Bewegungen ist assoziativ, da es allgemeiner bei der Hintereinanderausführung von Abbildungen nicht auf die Klammerung ankommt. Die identische Bewegung ist die neutrale Bewegung. In einem Monoid ist das neutrale Element eindeutig bestimmt. Wenn es nämlich zwei Elemente  $e_1$  und  $e_2$  gibt mit der neutralen Eigenschaft, so folgt sofort

$$e_1 = e_1 e_2 = e_2.$$

DEFINITION 1.6. Ein Monoid  $(G, \circ, e)$  heißt *Gruppe*, wenn jedes Element ein *inverses Element* besitzt, d.h. wenn es zu jedem  $x \in G$  ein  $y \in G$  gibt mit  $x \circ y = e = y \circ x$ .

Die Menge aller Abbildungen auf einer Menge  $X$  in sich selbst ist mit der Hintereinanderschaltung ein Monoid; die nicht bijektiven Abbildungen sind aber nicht umkehrbar, so dass sie kein Inverses besitzen und daher keine Gruppe vorliegt. Die Menge der bijektiven Selbstabbildungen einer Menge und die Menge der Bewegungen eines geometrischen Objektes sind hingegen eine Gruppe. In einer Gruppe ist das inverse Element zu einem Element  $x \in G$  eindeutig bestimmt. Wenn nämlich  $y$  und  $z$  die Eigenschaft besitzen, zu  $x$  invers zu sein, so gilt

$$y = ye = y(xz) = (yx)z = ez = z.$$

Daher schreibt man das zu einem Gruppenelement  $x \in G$  eindeutig bestimmte inverse Element als

$$x^{-1}.$$

DEFINITION 1.7. Eine Gruppe  $(G, \circ, e)$  heißt *kommutativ* (oder *abelsch*), wenn die Verknüpfung kommutativ ist, wenn also  $x \circ y = y \circ x$  für alle  $x, y \in G$  gilt.





## Abbildungsverzeichnis

Quelle = Snijden kruisen evenwijdig.png, Autor = Benutzer MADe auf nl.wikipedia, Lizenz = cc-by-sa 3.0	1
Quelle = Kreis3Teilung.svg, Autor = Benutzer Exxu auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	4
Quelle = Kreis5Teilung.svg, Autor = Benutzer Exxu auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0	4
Quelle = Driezijdige piramide.png, Autor = Benutzer Svdmolen auf nl.wikipedia, Lizenz = PD	6
Quelle = Metano.png, Autor = Benutzer Kaprak auf Commons, Lizenz = PD	6