Prof. Dr. H. Brenner, Dr. L. Katthän **Osnabrück SS 2014**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 6

Übungsaufgaben

Aufgabe 6.1. Entwerfe einen Termstammbamm für den Term

$$f\alpha\alpha g x \alpha c_2 f \beta g y \alpha c_1 g f z \beta g c_1 f c_1$$

wie in Beispiel 6.3.

Aufgabe 6.2. Wir betrachten die arithmetische Grundtermmenge, die aus den Konstanten 0 und 1, den Variablen x_n, $n \in \mathbb{N}$, dem einstelligen Funktionssymbol N und den beiden zweistelligen Funktionssymbolen α und μ besteht. Entscheide, ob die folgenden Wörter über diesem Termalphabet Terme sind oder nicht.

(1) $NNNNNNN01$,
(2) $NNNNNNx_1NNNNNNNNNNNx_2$,
(3) $\alpha NNNNNN0NNNNNNNNNNN1$,
(4) $NNN\mu NNN\mu 0NNNNNNNNNNNN1$,
(5) $\mu\alpha\mu\alpha\mu\alpha 0101010$,
(6) $\alpha\alpha\alpha N x_1 N x_2 x_3 x_4 x_3$.

Schreibe diejenigen Wörter, die Terme sind, mit Klammern, $'$, $+$ und $\cdot$.

Aufgabe 6.3. Erläutere den Unterschied zwischen $G = (V, K, F_n, n \in \mathbb{N}_+)$ und $A = V \cup K \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} F_n$ in Definition 6.2.

Aufgabe 6.4. Es sei G eine Grundtermmenge und $t \in T(G)$ ein G-Term. Es sei u das am weitesten links stehende Symbol von t und v das am weitesten rechts stehende Symbol von t. Zeige die folgenden Eigenschaften.

(1) Wenn u eine Variable oder eine Konstante ist, so ist $t = u$.
(2) v ist eine Variable oder eine Konstante.
(3) Wenn t_1 und t_2 Terme sind, so ist $t_1 t_2$ kein Term.

Aufgabe 6.5. Es sei G eine Grundtermmenge und t ein G-Term. Es sei n die Gesamtzahl der Variablen und Konstanten in t, wobei mehrfaches Vorkommen auch mehrfach gezählt wird. Es sei k die Summe über alle Stelligkeiten der in t vorkommenden Funktionssymbolen, wobei wiederum mehrfach auftretende Symbole auch mehrfach gezählt werden.

(1) Bestimme n und k im Term
$$ggxyhfxfzgyfy\,,$$
wobei f einstellig, g zweistellig und h dreistellig sei.
(2) Es sei t weder eine Variable noch eine Konstante. Zeige $k \geq n$.
(3) Zeige, dass die Differenz $n - k$ beliebig groß sein kann.

Aufgabe 6.6. Für A, B, C in der Ebene bedeute $R(A, B, C)$ die Rechtwinkligkeit des durch A, B, C gegebenen Dreiecks an der Ecke A und $S(A, B, C)$ die pythagoreische Längenbeziehung. Betrachte die beiden formalen Aussagen
$$\forall A \forall B \forall C (R(A, B, C) \longrightarrow S(A, B, C))$$
und
$$\forall A \forall B \forall C R(A, B, C) \longrightarrow \forall A \forall B \forall C S(A, B, C)\,.$$
Welche ist (sind) eine Formalisierung des Satzes von Pythagoras, welche ist (sind) wahr?

Aufgabe 6.7. Es sei T die Termmenge zum Symbolalphabet $S = \{0, 1, +, \cdot\}$. und zur Variablenmenge x_i, $i \in I$. Definiere eine natürliche Abbildung von T in den Polynomring $\mathbb{Z}[x_i : i \in I]$. Ist diese Abbildung injektiv? Ist sie surjektiv? Was ist das Bild?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 6.8. (2 Punkte)

Eine Grundtermmenge sei durch die Variablenmenge $V = \{x, y, z\}$, eine Konstantenmenge $K = \{c_1, c_2\}$, die einstelligen Funktionssymbole $F_1 = \{f, g\}$ und die zweistelligen Funktionssymbole $F_2 = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ gegeben. Entwerfe einen Termstammbaum für den Term
$$gf\beta\beta\alpha fxy\gamma c_1 zggc_2\,.$$

Aufgabe 6.9. (5 Punkte)

Zeige, dass es kein gleichseitiges Dreieck gibt, dessen sämtliche Ecken rationale Koordinaten besitzen.

Diese Aufgabe ist nicht ganz einfach. Zur Lösung verwende man, dass $\sqrt{3}$ irrational ist und den Satz des Pythagoras.

Aufgabe 6.10. (2 Punkte)

Beweise das Lemma von Zorn für eine total geordnete Menge.