Prof. Dr. H. Brenner, Dr. L. Katthän **Osnabrück SS 2014**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 10

Übungsaufgaben

Aufgabe 10.1. Ersetze in den folgenden aussagenlogischen Tautologien

$$p_1 \text{ durch } \beta_1 := \exists x Rxy,\ p_2 \text{ durch } \beta_2 := \forall u\,(fu = c \rightarrow Pc)\,,$$
$$p_3 \text{ durch } \beta_3 := \exists y \forall x gxz = y,\ p_4 \text{ durch } \beta_4 := Rcu \rightarrow c = u.$$

(1) $p_1 \wedge p_2 \rightarrow p_1$,
(2) $(p_1 \wedge p_4 \rightarrow \neg p_2) \wedge (p_1 \wedge p_4 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1)) \rightarrow (p_1 \wedge p_4 \rightarrow \neg p_2 \wedge (p_2 \rightarrow p_1))$,
(3) $p_3 \wedge \neg p_3 \rightarrow p_4$,
(4) $(p_1 \wedge p_4 \rightarrow p_3) \wedge (\neg\,(p_1 \wedge p_4) \rightarrow p_3) \rightarrow p_3$.

Aufgabe 10.2. Es sei S ein Symbolalphabet und $t_1, \ldots, t_n$ seien S-Terme. Zeige die Ableitbarkeit

$$\vdash t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3 \wedge \ldots \wedge t_{n-1} = t_n \rightarrow t_1 = t_n\,.$$

Aufgabe 10.3. Es seien $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ Terme und f ein n-stelliges Funktionssymbol. Zeige, dass die Ableitbarkeit

$$\vdash s_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge s_n = t_n \rightarrow fs_1 \ldots s_n = ft_1 \ldots t_n$$

gilt.

Aufgabe 10.4. Zeige direkt (ohne die Verwendung der Ableitungsbeziehung), dass die folgenden Ausdrücke allgemeingültig sind (dabei seien r, s, t, $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ Terme, f ein n-stelliges Funktionssymbol und R ein n-stelliges Relationssymbol).

(1)
$$\vdash s = t \rightarrow t = s\,.$$
(2)
$$\vdash r = s \wedge s = t \rightarrow r = t\,.$$
(3)
$$\vdash s_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge s_n = t_n \rightarrow fs_1 \ldots s_n = ft_1 \ldots t_n\,.$$
(4)
$$\vdash s_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge s_n = t_n \wedge Rs_1 \ldots s_n \rightarrow Rt_1 \ldots t_n\,.$$

Aufgabe 10.5. Es seien r_1, r_2, s, t Terme einer prädikatenlogischen Sprache L^S und sei x eine Variable. Zeige durch ein Beispiel, dass

$$s = t \rightarrow r_1 \frac{s}{x} = r_2 \frac{t}{x}$$

nicht ableitbar sein muss.[1]

Aufgabe 10.6.*

Es seien r_1, r_2, s Terme einer prädikatenlogischen Sprache L^S und sei x eine Variable. Zeige durch ein Beispiel, dass

$$r_1 = r_2 \rightarrow r_1 \frac{s}{x} = r_2 \frac{s}{x}$$

nicht ableitbar sein muss.

Aufgabe 10.7. Gehört in einem Ausdruck der Form $(x = y) \frac{t}{x}$ die Symbolfolge $\frac{t}{x}$ zur prädikatenlogischen Sprache? Gehört $(x = y) \frac{t}{x}$ dazu?

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 10.8. (4 Punkte)

Es seien $r, s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ Terme einer prädikatenlogischen Sprache L^S und seien $x_1, \ldots, x_n$ verschiedene Variablen. Zeige durch Induktion über den Aufbau des Termes r die Ableitbarkeit

$$\vdash s_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge s_n = t_n \rightarrow \left(r \frac{s_1, \ldots, s_n}{x_1, \ldots, x_n} = r \frac{t_1, \ldots, t_n}{x_1, \ldots, x_n} \right) .$$

Aufgabe 10.9. (4 Punkte)

Es seien $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ Terme einer prädikatenlogischen Sprache L^S und seien $x_1, \ldots, x_n$ verschiedene Variablen.

(1) Es sei R ein k-stelliges Relationssymbol und $r_1, \ldots, r_k$ seien Terme. Zeige die Ableitbarkeit

$$\vdash s_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge s_n = t_n \rightarrow \left((R r_1 \ldots r_k) \frac{s_1, \ldots, s_n}{x_1, \ldots, x_n} \rightarrow (R r_1 \ldots r_k) \frac{t_1, \ldots, t_n}{x_1, \ldots, x_n} \right) .$$

(2) Es seien r_1 und r_2 Terme. Zeige die Ableitbarkeit

$$\vdash s_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge s_n = t_n \rightarrow \left(r_1 \frac{s_1, \ldots, s_n}{x_1, \ldots, x_n} = r_2 \frac{s_1, \ldots, s_n}{x_1, \ldots, x_n} \rightarrow r_1 \frac{t_1, \ldots, t_n}{x_1, \ldots, x_n} = r_2 \frac{t_1, \ldots, t_n}{x_1, \ldots, x_n} \right) .$$

[1] Die Nicht-Ableitbarkeit wird durch die Angabe eines Modells gezeigt; dies verwendet die Korrektheit des Ableitungskalküls, den wir noch nicht vollständig behandelt haben.

Tipp: Verwende Aufgabe 10.8

Aufgabe 10.10. (4 Punkte)

Es sei S ein Symbolalphabet, $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ seien S-Terme, $x_1, \ldots, x_n$ verschiedene Variablen und α sei ein S-Ausdruck. Zeige die Allgemeingültigkeit

$$\vDash s_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge s_n = t_n \rightarrow \left(\alpha \frac{s_1, \ldots, s_n}{x_1, \ldots, x_n} \rightarrow \alpha \frac{t_1, \ldots, t_n}{x_1, \ldots, x_n} \right) .$$

Aufgabe 10.11. (4 Punkte)

Zeige durch ein Beispiel, dass bei einem ableitbaren Ausdruck der Form

$$\vdash s = t \rightarrow \left((\exists z \beta) \frac{s}{x} \rightarrow (\exists z \beta) \frac{t}{x} \right)$$

die durch die Existenzquantoren gebundenen Variablen (nach der durchgeführten Substitution) nicht übereinstimmen müssen.