**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2009/2010**

# Vorkurs Mathematik

## Arbeitsblatt 7

Aufgabe 7.1. Man gebe die Körperaxiome in quantorenlogischer Gestalt an.

Aufgabe 7.2. Zeige, dass die Verknüpfung auf einer Geraden, die zwei Punkten ihren Mittelpunkt zuordnet, kommutativ, aber nicht assoziativ ist. Gibt es ein neutrales Element?

Aufgabe 7.3. Es sei $K$ ein Körper mit $2 = 1 + 1 \neq 0$. Zeige, dass die Verknüpfung, die zwei Elementen $a$ und $b$ ihr arithmetisches Mittel $\frac{a+b}{2}$ zuordnet, nicht assoziativ ist.

Aufgabe 7.4. Zeige, dass die einelementige Menge $\{0\}$ alle Körperaxiome erfüllt mit der einzigen Ausnahme, dass $0 = 1$ ist.

Aufgabe 7.5. Es seien $x, y, z, w$ Elemente in einem Körper, wobei $z$ und $w$ nicht null seien. Beweise die folgenden Bruchrechenregeln.

(1)
$$\frac{x}{1} = x\,,$$

(2)
$$\frac{1}{-1} = -1\,,$$

(3)
$$\frac{0}{z} = 0\,,$$

(4)
$$\frac{z}{z} = 1\,,$$

(5)
$$\frac{x}{z} = \frac{xw}{zw}$$

(6)
$$\frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw}\,,$$

(7)
$$\frac{x}{z}\cdot\frac{y}{w}=\frac{xw+yz}{zw}\,.$$

Gilt die zu (7) analoge Formel, die entsteht, wenn man die Addition mit der Multiplikation vertauscht, also

$$(x-z)+(y-w)=(x+w)(y+z)-(z+w)\,?$$

Zeige, dass die „beliebte Formel“

$$\frac{x}{z}+\frac{y}{w}=\frac{x+y}{z+w}$$

nicht gilt.

Aufgabe 7.6. Beweise das allgemeine Distributivitätsgesetz für einen Körper.

Aufgabe 7.7. Wie viele „Rechenschritte“ (einschließlich „Gleichheitstests“) muss man durchführen, um die in Beispiel 7.2 beschriebene Struktur auf $\{0,1\}$ formal als einen Körper nachzuweisen? Kann man durch eine geschickte Reihenfolge die Anzahl der Schritte reduzieren?

Aufgabe 7.8. Sei $G$ eine Gruppe. Zeige, dass

$$(x^{-1})^{-1}=x$$

für alle $x \in G$ ist.

Aufgabe 7.9. Sei $G$ eine Gruppe und $x,y \in G$. Drücke das Inverse von $xy$ durch die Inversen von $x$ und $y$ aus.