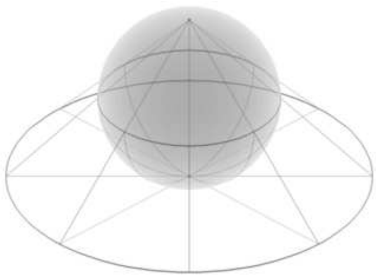
Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2010/2011**

Mathematik III

Vorlesung 76

Das Konzept einer Mannigfaltigkeit

In der zweiten Hälfte dieses Kurses werden wir den Begriff der Mannigfaltigkeit entwickeln. Als Beispiel betrachten wir die Erde (ihre Oberfläche), die in der Wissenschaftsgeschichte lange für eine Scheibe gehalten wurde, und zwar aus gutem Grund. Sie sieht nämlich lokal aus wie eine Ebene. Dies spiegelt sich auch in den Karten wieder, die man sich von ihr macht. Eine Karte ist ein ebenes „Blatt", dessen Punkte in Bijektion zu einem Ausschnitt der Erdoberfläche steht. Insbesondere bei kleinen Ausschnitten halten wir das für unproblematisch, bei Karten aber, die große Ausschnitte oder gar die gesamte Erde wiedergeben sollen, tauchen schnell Fragen auf, was die Karte richtig wiedergibt und was nicht, Fragen nach der Längentreue, Flächentreue, Winkeltreue, Fragen über fehlende Punkte oder mehrfach auftretende Punkte, Fortsetzungsfragen, Krümmungsfragen ...



Beispiel 76.1. Wir betrachten die Kugeloberfläche

$$K = \{(x,y,z) |\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

und nennen den Punkt $N = (0,0,1)$ Nordpol und den Punkt $S = (0,0,-1)$ Südpol. Ein Punkt $P = (x,y,z) \in K$, $P \neq N$, definiert zusammen mit dem Nordpol eine eindeutige Gerade, die durch

$$(tx, ty, 1 + t(z-1)) = (0,0,1) + t((x,y,z) - (0,0,1)),\ t \in \mathbb{R}\,,$$

parametrisiert ist. Der Vektor $(x,y,z) - (0,0,1)$, der diese Gerade definiert, ist nicht parallel zur $x-y$-Ebene, d.h. dass es genau einen Schnittpunkt dieser Geraden mit dieser Ebene gibt. Dieser ergibt sich zum Parameter

$$t = \frac{1}{z-1}\,,$$

es handelt sich um den Punkt

$$(\frac{x}{z-1}, \frac{y}{z-1}, 0)\,.$$

Wir fassen diese Konstruktion als eine Abbildung

$$\alpha : K \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (\frac{x}{z-1}, \frac{y}{z-1})$$

auf. Es ist anschaulich klar, dass diese Abbildung eine Bijektion ist, was sich auch einfach über die Formeln nachrechnen lässt. Die Umkehrabbildung ergibt sich, indem man einen Punkt $(u, v, 0)$ der Ebene mit dem Nordpol verbindet und den Durchstoßungspunkt $\neq N$ mit der Kugeloberfläche berechnet. Dies führt zur Bedingung

$$\begin{aligned} & |(0,0,1) + a((u,v,0) - (0,0,1))| \\ = \ & |(au, av, 1-a)| \\ = \ & a^2u^2 + a^2v^2 + (1-a)^2 \\ = \ & 1, \end{aligned}$$

was auf $a(au^2 + av^2 - 2 + a) = 0$ führt. Die Lösung $a = 0$ entspricht dem Nordpol, an der wir nicht interessiert sind, so das wir auf $a = \frac{2}{u^2+v^2+1}$ geführt werden, also auf die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow K \setminus \{N\},\ (u,v) \longmapsto (\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, 1 - \frac{2}{u^2+v^2+1}).$$

Insbesondere ist also die reelle Ebene homöomorph zur in einem Punkt „gelochten“ Kugeloberfläche.

Eine entsprechende Überlegung kann man für $K \setminus \{S\}$ anstellen. Dies führt zur Abbildung

$$\beta : K \setminus \{S\} \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \longmapsto (\frac{x}{-z-1}, \frac{y}{-z-1})$$

mit der Umkehrabbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow K \setminus \{S\},\ (s,t) \longmapsto (\frac{2s}{s^2+t^2+1}, \frac{2t}{s^2+t^2+1}, -1 + \frac{2}{s^2+t^2+1}).$$

Der Südpol entspricht bei der ersten Abbildung dem Mittelpunkt der euklidischen Ebene und der Nordpol entspricht bei der zweiten Abbildung dem Mittelpunkt der euklidischen Ebene. Wir nennen beide Abbildungen bzw. ihre Umkehrabbildungen Karten. Beide Karten decken zusammen die gesamte Kugeloberfläche ab. Da es sich um Homöomorphismen handelt, geben sie die wesentlichen topologischen Eigenschaften der Sphäre richtig wieder. Sie sind beide nicht für die Geographie der Erde gut geeignet, da die Karten die gesamte Ebene benötigen und die Längen sehr stark verzerren.

Beide Karten sind gleich gut. Es ist einfach, Punkte (und allgemeiner andere Figuren) auf der einen Karte in die andere Karte umzurechnen. Man muss dabei allerdings beachten, dass die beiden Pole nur in einer Karte vertreten sind. Die Punkte der Menge $K \setminus \{N, S\}$ finden sich auf beiden Karten, und zwar stehen sie durch beide Karten in Bijektion zu der im Mittelpunkt gelochten Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Die *Übergangsabbildung* (oder der *Kartenwechsel*) wird durch $\psi = \beta \circ (\alpha^{-1}|_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}})$ gegeben. Dabei ist

$$\begin{aligned}
\psi(u,v) &= \beta(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, 1-\frac{2}{u^2+v^2+1}) \\
&= \left(\frac{\frac{2u}{u^2+v^2+1}}{-2+\frac{2}{u^2+v^2+1}}, \frac{\frac{2v}{u^2+v^2+1}}{-2+\frac{2}{u^2+v^2+1}} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{u}{u^2+v^2+1}}{\frac{-(u^2+v^2+1)+1}{u^2+v^2+1}}, \frac{\frac{v}{u^2+v^2+1}}{\frac{-(u^2+v^2+1)+1}{u^2+v^2+1}} \right) \\
&= (\frac{-u}{u^2+v^2}, \frac{-v}{u^2+v^2}).
\end{aligned}$$

Diese Übergangsabbildung induziert nicht nur einen Homöomorphismus zwischen $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ mit $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$,[1] was unmittelbar daraus folgt, dass die Kartenabbildungen α und β Homöomorphismen sind, sondern sogar einen Diffeomorphismus. Dies ist direkt aus der Funktionsvorschrift ablesbar; es macht aber keinen Sinn zu sagen, dass die Kartenabbildungen Diffeomorphismen sind, da ja die Kugeloberfläche keine offene Teilmenge im $\mathbb{R}^3$ ist. Was bisher fehlt ist eine „differenzierbare Struktur“ auf dieser Oberfläche, um von diffeomorph sprechen zu können.

Eine *Mannigfaltigkeit* ist ein geometrisches Gebilde, das „lokal“ so aussieht wie der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$. Dabei setzen wir dieses geometrische Gebilde als einen topologischen Raum an, und lokal wird dadurch präzisiert, dass es eine Überdeckung aus offenen Mengen gibt, die homöomorph zu offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind. Obwohl wir im Folgenden mit topologischen Räumen arbeiten sei erwähnt, dass sich der Vorstellungsgehalt des Folgenden nicht verringert, wenn man bei einem topologischen Raum einfach an einen metrischen Raum denkt.

Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Definition 76.2. Ein topologischer Hausdorff-Raum M heißt eine *topologische Mannigfaltigkeit* der *Dimension* n, wenn es eine offene Überdeckung $M = \bigcup_{i\in I} U_i$ gibt derart, dass jedes U_i homöomorph zu einer offenen Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist.

Zu jedem Punkt $P \in M$ gibe es also eine offene Umgebung $P \in U \subseteq M$, die homöomorph zu einer offenen Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist. Sei

$$\varphi : U \longrightarrow V$$

[1] Es empfiehlt sich hier nicht, „mit sich“ zu sagen, da man sich die beiden Kartenebenen als unabhängig von einander vorstellen sollte. Die Beziehung zwischen ihnen entsteht allein dadurch, dass sie beide die gleiche Kugeloberfläche beschreiben.

eine Homöomorphie und sei $Q = \varphi(P)$. Dann entspricht einer offenen Ballumgebung $Q \in U(Q, \epsilon) \subseteq V$ eine offene Umgebung $U' = \varphi^{-1}(U(Q, \epsilon))$ mit $P \in U' \subseteq U$, die nach Konstruktion homöomorph zu einem offenen Ball ist. Man kann daher eine topologische Mannigfaltigkeit auch als einen topologischen Hausdorff-Raum charakterisieren, der *lokal euklidisch* ist.

Definition 76.3. Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit. Dann nennt man jede Homöomorphie

$$\varphi : U \longrightarrow V,$$

wobei $U \subseteq M$ und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen sind, eine (topologische) *Karte* für M.

Dabei nennt man die offene Menge $U \subseteq M$ manchmal das *Kartengebiet* und $V \subseteq \mathbb{R}^n$ das *Kartenbild*. Zu einer Karte

$$\varphi : U \longrightarrow V$$

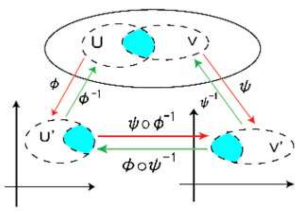
und einer offenen Teilmenge $U' \subseteq U$ ist auch die induzierte Abbildung

$$\varphi|_{U'} : U' \longrightarrow \varphi(U')$$

wieder eine Karte. Manchmal nennt man auch die Umkehrabbildung eine Karte. Statt Karte spricht man auch von einem *lokalen Koordinatensystem*. Durch die Karte $\varphi : U \to V$ werden ja die Koordinaten auf $V \subseteq \mathbb{R}^n$ auf U übertragen. Die j-te Koordinate $x_j : V \to \mathbb{R}$ induziert die (lokale Koordinaten)-Funktion

$$x_j \circ \varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

(die oft einfach wieder mit x_j bezeichnet wird), und ein Punkt $Q = (x_1, \ldots, x_n) \in V$ entspricht einem Punkt $P = \varphi^{-1}(Q)$.



Definition 76.4. Es sei M eine topologische Mannigfaltigkeit, es seien $U_1, U_2 \subseteq M$ offene Teilmengen und $\alpha_1 : U_1 \to V_1$ und $\alpha_2 : U_2 \to V_2$ seien Karten (mit $V_1, V_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ offen). Dann heißt die Abbildung

$$\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1} : V_1 \cap \alpha_1(U_1 \cap U_2) \longrightarrow V_2 \cap \alpha_2(U_1 \cap U_2)$$

die *Übergangsabbildung* zu diesen Karten.

Der Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ ist die offene Teilmenge, auf der beide Karten definiert sind und worauf man die beiden Karten vergleichen kann. Genauer müsste man in der Definition von der Einschränkung von α_1^{-1} auf die offene Teilmenge $\alpha_1(U_1 \cap U_2) \subseteq V_1$ sprechen.

Definition 76.5. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \overline{\mathbb{N}}_+$. Ein topologischer Hausdorff-Raum M zusammen mit einer offenen Überdeckung $M = \bigcup_{i \in I} U_i$ und Karten

$$\alpha_i : U_i \longrightarrow V_i$$

mit $V_i \subseteq \mathbb{R}^n$ derart, dass die Übergangsabbildungen

$$\alpha_j \circ (\alpha_i)^{-1} : V_i \cap \alpha_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow V_j \cap \alpha_j(U_i \cap U_j)$$

C^k-Diffeomorphismen sind, heißt *C^k-Mannigfaltigkeit* oder *differenzierbare Mannigfaltigkeit* (vom Grad k). Die Menge der Karten (U_i, α_i), $i \in I$, nennt man auch den *C^k-Atlas* der Mannigfaltigkeit.

Eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist insbesondere eine topologische Mannigfaltigkeit. Nach unserer Definition ist der Atlas ein integraler Bestandteil des Mannigfaltigkeitsbegriffs. Wichtiger als der Atlas ist aber die durch den Atlas definierte *differenzierbare Struktur* auf der Mannigfaltigkeit. Dies wird deutlicher, wenn wir den Begriff der differenzierbaren Abbildung zwischen zwei Mannigfaltigkeiten zur Verfügung haben und von diffeomorphen Mannigfaltigkeiten sprechen können.

Definition 76.6. Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine offene Teilmenge $U \subseteq M$, die mit den eingeschränkten Karten versehen ist, heißt *offene Untermannigfaltigkeit*.

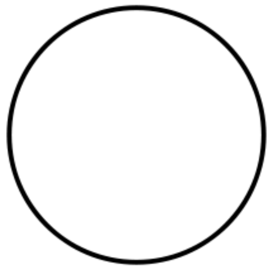
Beispiel 76.7. Jede offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine C^∞-Mannigfaltigkeit, wenn man die Identität $\mathrm{Id} : V \to V$ als Karte nimmt. Die einzige Übergangsabbildung ist dann ebenfalls diese Identität, die ein C^∞-Diffeomorphismus ist. Dies ist dann eine Mannigfaltigkeit mit einem Atlas, der aus einer einzigen Karte besteht. Man kann aber genauso gut den Atlas nehmen, der aus sämtlichen offenen Teilmengen $U \subseteq V$ und den zugehörigen identischen Karten φ_U besteht. Die Übergangsabbildungen sind dann die Identitäten auf $U_1 \cap U_2$.

Wir haben schon früher im Kontext des Zwischenwertsatzes von zusammenhängenden metrischen Räumen gesprochen. Die gleiche Definition verwenden wir auch für topologische Räume.

Definition 76.8. Ein topologischer Raum X heißt *zusammenhängend*, wenn es in X genau zwei Teilmengen gibt (nämlich $\emptyset$ und der Gesamtraum X), die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

Häufig interessiert man sich nur für zusammenhängende Mannigfaltigkeiten, vor allem deshalb, da man im nicht zusammenhängenden Fall die einzelnen „Zusammenhangskomponenten“ getrennt voneinander untersuchen kann. Wir besprechen kurz niedrigdimensionale Mannigfaltigkeiten.

Beispiel 76.9. Bei einer nulldimensionalen Mannigfaltigkeit M gibt es für jeden Punkt $P \in M$ eine offene Umgebung $P \in U$, die homöomorph zu einer offenen Menge des $\mathbb{R}^0 = \{0\}$ ist. D.h. dass die einpunktige Menge $\{P\}$ offen sein muss, und daher muss M die diskrete Topologie tragen, d.h. jede Teilmenge ist offen. Daher ist die einzige zusammenhängende nulldimensionale Mannigfaltigkeit die einpunktige Menge.



Eine Kreislinie ist eine kompakte eindimensionale Mannigfaltigkeit

Beispiel 76.10. An eindimensionalen Mannigfaltigkeiten gibt es zunächst die offenen Teilmengen des $\mathbb{R}^1$. Diese sind Vereinigungen von offenen Intervallen, und sie sind genau dann zusammenhängend, wenn sie ein offenes Intervall sind. Jedes offene, beschränkte oder unbeschränkte Intervall ist homöomoph und auch diffeomorph zum offenen Einheitsintervall $]0,1[$ und zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ selbst. Die abgschlossenen Intervalle $[a,b]$ mit $a < b$ sind keine Mannigfaltigkeiten, da es für die Randpunkte (die Intervallgrenzen) keine offene Umgebung gibt, die homöomorph zu einem offenen Intervall ist (sie sind aber sogenannte *Mannigfaltigkeiten mit Rand*).

Darüber hinaus gibt es noch den *Kreis* (die *Sphäre*) S^1 als weitere zusammenhängende eindimensionale Mannigfaltigkeit. Es ist

$$S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \, x^2 + y^2 = 1\} .$$

Für jeden Punkt $P \in S^1$ ist $S^1 \setminus \{P\}$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ (durch stereographische Projektion). Der Kreis ist nicht homöomorph zu $\mathbb{R}$, da der Kreis kompakt ist, die reellen Zahlen aber nicht. Neben S^1 und $\mathbb{R}$ gibt es keine weiteren eindimensionalen zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten mit abzählbarer Topologie (was hier ohne Beweis erwähnt sei).

Ab der Dimension zwei ist es ohne starke zusätzliche Voraussetzungen nicht möglich, sich eine Übersicht über alle Mannigfaltigkeiten zu verschaffen.

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Stereographic projection in 3D.png, Autor = Benutzer Mark.Howison auf en.Wikipedia, Lizenz = PD 1

Quelle = Manifold zahyou3.png, Autor = Benutzer 132?? auf ja. Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0 4

Quelle = Circle - black simple.svg, Autor = Benutzer Dakdada auf Commons, Lizenz = PD 6