Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2011/2012**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 6

Bei den beiden folgenden Aufgaben soll mit den Peano-Axiomen der zweiten Stufe argumentiert werden.

Aufgabe 6.1. Zeige ausgehend von den Peano-Axiomen, dass jedes Element $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, einen Vorgänger besitzt.

Aufgabe 6.2. Man gebe Beispiele $(M, 0, ')$ für Mengen mit einem ausgezeichneten Element $0 \in M$ und einer Abbildung $' : M \to M$ an, die je zwei der Peanoaxiome erfüllen, aber nicht das dritte.

Aufgabe 6.3. Zeige, dass in einer Sprache erster Stufe nur abzählbar viele Teilmengen von $\mathbb{N}$ „adressierbar“ sind und dass daher das zweitstufige Induktionsaxiom der Peano-Axiome nicht in der ersten Stufe formulierbar ist.

Aufgabe 6.4. Es seien $p_1, \ldots, p_n$ Ausdrücke und es seien $i_1, \ldots, i_k$ Elemente aus $\{1, \ldots, n\}$. Zeige, dass

$$\vdash p_1 \wedge \ldots \wedge p_n \to p_{i_1} \wedge \ldots \wedge p_{i_k}$$

gilt.

Aufgabe 6.5. Zeige

$$\vdash (p \to r) \wedge (q \to r) \wedge (\neg p \to q) \to r\,.$$

Aufgabe 6.6. Begründe die folgende Ableitungsregel: Aus $\vdash \alpha$ und $\vdash \alpha \wedge \beta \to \gamma$ folgt $\vdash \beta \to \gamma$.

Aufgabe 6.7. Es seien $s_1, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n$ Terme, f ein n-stelliges Funktionssymbol und R ein n-stelliges Relationssymbol. Zeige, dass die folgenden Aussagen im Prädikatenkalkül ableitbar sind.

(1)
$$\vdash s_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge s_n = t_n \to f s_1 \ldots s_n = f t_1 \ldots t_n\,.$$

(2)
$$\vdash s_1 = t_1 \wedge \ldots \wedge s_n = t_n \wedge R s_1 \ldots s_n \to R t_1 \ldots t_n\,.$$