Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2013/2014**

Vorkurs Mathematik

Arbeitsblatt 1

Übungsaufgaben

Aufgabe 1.1. Beweise durch Induktion die folgenden Formeln.

(1)
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \, ,$$

(2)
$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \, ,$$

(3)
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \, .$$

Aufgabe 1.2. Zeige, dass mit der einzigen Ausnahme $n = 3$ die Beziehung

$$2^n \geq n^2$$

gilt.

Aufgabe 1.3.*

Beweise durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \, .$$

Aufgabe 1.4. Beweise durch Induktion, dass die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (beginnend bei 1) stets eine Quadratzahl ist.

AUFGABE 1.5. Die Folge a_n, $n \in \mathbb{N}$, sei rekursiv durch

$$a_1 = 1 \text{ und } a_n = \sum_{k=1}^{n-1} k a_k \text{ für } n \geq 2$$

definiert. Zeige, dass für $n \geq 2$

$$a_n = \frac{1}{2} n!$$

gilt.

AUFGABE 1.6.*

Zeige mittels vollständiger Induktion die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{bei } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{bei } n \text{ ungerade} . \end{cases}$$

AUFGABE 1.7. Die Städte $S_1, \ldots, S_n$ seien untereinander durch Straßen verbunden und zwischen zwei Städten gibt es immer genau eine Straße. Wegen Bauarbeiten sind zur Zeit alle Straßen nur in einer Richtung befahrbar. Zeige, dass es trotzdem mindestens eine Stadt gibt, von der aus alle anderen Städte erreichbar sind.

AUFGABE 1.8. Sei m eine positive natürliche Zahl. Es seien a, b natürliche Zahlen und es seien r bzw. s die Reste von a bzw. b bei Division durch m. Zeige, dass der Rest von $a+b$ bei Division durch m gleich dem Rest von $r+s$ bei Division durch m ist. Formuliere und beweise die entsprechende Aussage für die Multiplikation.

AUFGABE 1.9. Betrachte im Zehnersystem die Zahl

$$473 .$$

Wie sieht diese Zahl im Dualsystem aus?

AUFGABE 1.10. Begründe, ohne auf Gewohnheiten zu verweisen, warum das *schriftliche Addieren* (von natürlichen Zahlen im Zehnersystem) korrekt ist, also wirklich die Summe der vorgegebenen Zahlen berechnet.

AUFGABE 1.11. Begründe, ohne auf Gewohnheiten zu verweisen, warum das *schriftliche Multiplizieren* (von natürlichen Zahlen im Zehnersystem) korrekt ist, also wirklich das Produkt der vorgegebenen Zahlen berechnet.

Aufgaben zum Abgeben[1]

Aufgabe 1.12. (3 Punkte)

Sei $m \in \mathbb{N}$. Zeige durch Induktion die Gleichheit

$$(2m+1)\prod_{i=1}^{m}(2i-1)^2 = \prod_{k=1}^{m}(4k^2-1)\,.$$

Aufgabe 1.13. (4 Punkte)

Eine n-Schokolade ist ein rechteckiges Raster, das durch $a-1$ Längsrillen und $b-1$ Querrillen in $n = a \cdot b$ $(a, b \in \mathbb{N}_+)$ mundgerechte kleinere Rechtecke eingeteilt ist. Ein Teilungsschritt an einer Schokolade ist das vollständige Durchtrennen einer Schokolade längs einer Längs- oder Querrille. Eine vollständige Aufteilung einer Schokolade ist eine Folge von Teilungsschritten (an der Ausgangsschokolade oder an einer zuvor erhaltenen Zwischenschokolade), deren Endprodukt aus den einzelnen Mundgerechtecken besteht. Zeige durch Induktion, dass jede vollständige Aufteilung einer n-Schokolade aus genau $n-1$ Teilungsschritten besteht.

Aufgabe 1.14. (4 Punkte)

Betrachte im 15er System mit den Ziffern $0, 1, \ldots, 8, 9, A, B, C, D, E$ die Zahl

$$5E6BB\,.$$

Wie sieht diese Zahl im Zehnersystem aus?

Aufgabe zum Knobeln

Aufgabe 1.15. (8 Punkte)

Zwei Spieler sitzen an einem runden Tisch und legen abwechselnd eine Münze (alle von der gleichen Größe) auf den Tisch, wobei sich die Münzen nicht überdecken dürfen. Es verliert der Spieler, der keine Münze mehr platzieren kann. Entwerfe eine Gewinnstrategie für den Spieler, der anfängt.

[1] In diesem Vorkurs findet kein Abgabe- und Korrekturbetrieb statt. Die Punkte dienen lediglich zur Orientierung.