

Vorkurs Mathematik**Arbeitsblatt 1****Übungsaufgaben¹**

AUFGABE 1.1. Beweise durch Induktion die folgenden Formeln.

(1)

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2},$$

(2)

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

(3)

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

AUFGABE 1.2. Zeige, dass mit der einzigen Ausnahme $n = 3$ die Beziehung

$$2^n \geq n^2$$

gilt.

AUFGABE 1.3.*

Beweise durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Formel

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

AUFGABE 1.4. Beweise durch Induktion, dass die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (beginnend bei 1) stets eine Quadratzahl ist.

¹Eine Aufgabe mit Stern bedeutet, dass es dazu eine Lösung gibt, die über einen Link zu erreichen ist.

AUFGABE 1.5. Die Folge a_n , $n \in \mathbb{N}$, sei rekursiv durch

$$a_1 = 1 \text{ und } a_n = \sum_{k=1}^{n-1} ka_k \text{ f\"ur } n \geq 2$$

definiert. Zeige, dass f\"ur $n \geq 2$

$$a_n = \frac{1}{2}n!$$

gilt.

AUFGABE 1.6.*

Zeige mittels vollst\"andiger Induktion die Formel

$$\sum_{k=1}^n (-1)^k k = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{bei } n \text{ gerade,} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{bei } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

AUFGABE 1.7. Die St\"adte S_1, \dots, S_n seien untereinander durch Stra\en verbunden und zwischen zwei St\"adten gibt es immer genau eine Stra\e. Wegen Bauarbeiten sind zur Zeit alle Stra\en nur in einer Richtung befahrbar. Zeige, dass es trotzdem mindestens eine Stadt gibt, von der aus alle anderen St\"adte erreichbar sind.

AUFGABE 1.8. Sei m eine positive nat\"urliche Zahl. Es seien a, b nat\"urliche Zahlen und es seien r bzw. s die Reste von a bzw. b bei Division durch m . Zeige, dass der Rest von $a+b$ bei Division durch m gleich dem Rest von $r+s$ bei Division durch m ist. Formuliere und beweise die entsprechende Aussage f\"ur die Multiplikation.

AUFGABE 1.9. Betrachte im Zehnersystem die Zahl

$$473.$$

Wie sieht diese Zahl im Dualsystem aus?

AUFGABE 1.10. Begr\"unde, ohne auf Gewohnheiten zu verweisen, warum das *schriftliche Addieren* (von nat\"urlichen Zahlen im Zehnersystem) korrekt ist, also wirklich die Summe der vorgegebenen Zahlen berechnet.

AUFGABE 1.11. Begr\"unde, ohne auf Gewohnheiten zu verweisen, warum das *schriftliche Multiplizieren* (von nat\"urlichen Zahlen im Zehnersystem) korrekt ist, also wirklich das Produkt der vorgegebenen Zahlen berechnet.

AUFGABE 1.12. Sei $m \in \mathbb{N}$. Zeige durch Induktion die Gleichheit

$$(2m + 1) \prod_{i=1}^m (2i - 1)^2 = \prod_{k=1}^m (4k^2 - 1).$$

AUFGABE 1.13. Eine n -Schokolade ist ein rechteckiges Raster, das durch $a - 1$ Längsrillen und $b - 1$ Querrillen in $n = a \cdot b$ ($a, b \in \mathbb{N}_+$) mundgerechte kleinere Rechtecke eingeteilt ist. Ein Teilungsschritt an einer Schokolade ist das vollständige Durchtrennen einer Schokolade längs einer Längs- oder Querrille. Eine vollständige Aufteilung einer Schokolade ist eine Folge von Teilungsschritten (an der Ausgangsschokolade oder an einer zuvor erhaltenen Zwischenschokolade), deren Endprodukt aus den einzelnen Mundgerechten besteht. Zeige durch Induktion, dass jede vollständige Aufteilung einer n -Schokolade aus genau $n - 1$ Teilungsschritten besteht.

AUFGABE 1.14. Betrachte im 15er System mit den Ziffern $0, 1, \dots, 8, 9, A, B, C, D, E$ die Zahl

$$5E6BB.$$

Wie sieht diese Zahl im Zehnersystem aus?

Aufgabe zum Knobeln

AUFGABE 1.15. Zwei Spieler sitzen an einem runden Tisch und legen abwechselnd eine Münze (alle von der gleichen Größe) auf den Tisch, wobei sich die Münzen nicht überdecken dürfen. Es verliert der Spieler, der keine Münze mehr platzieren kann. Entwerfe eine Gewinnstrategie für den Spieler, der anfängt.